UNIVERSITE Joseph KI-ZERBO
....
Office du Baccalauréat
....
Série A4

Année 2020
Session de Remplacement
Epreuve du 1^{er} tour
Durée : 3 heures
Coefficient : 03

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

Exercice 1 (5,5 points)

1) Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$.
   a) Calculer $P(2)$ et $P\left(\frac{1}{2}\right)$. (0,5 point + 0,5 point)
   b) Montrer que $P(x) = (x-2)(2x-1)(x+2)$. (1 point)
   c) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$ et l'inéquation $P(x) \geqslant 0$. (0,5 point + 1 point)
2) En utilisant les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $P(x) = 0$, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :
   a) $2e^{2x} - e^x - 8 + 4e^{-x} = 0$. (1 point)
   b) $2\left[\ln(x-1)\right]^3 - \left[\ln(x-1)\right]^2 - 8\ln(x-1) + 4 = 0$. (1 point)

Exercice 2 (4,5 points)

Un test oral comporte onze (11) questions dont sept (7) d'allemand et quatre (4) d'anglais. Les questions sont numérotées de un (1) à onze (11) sur des bouts de papier identiques qui sont déposés dans une boîte opaque. Un candidat tire simultanément trois (3) de ces questions.

1) Quel est le nombre de tirages possibles ? (0,5 point)
2) Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « les trois (3) questions tirées sont de l'allemand ». (0,5 point)
   B : « des trois (3) questions tirées, une seule est de l'allemand ». (0,5 point)
3) Pour une question d'anglais tirée, un bonus de deux (2) points est accordé au candidat.
Soit X la variable aléatoire réelle égale à la somme des points accordés au candidat.
   a) Quelles sont les valeurs prises par X ? (0,5 point)
   b) Déterminer la loi de probabilité de X. (2 points)
   c) Calculer l'espérance mathématique de X. (0,5 point)

Problème (10 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x - 2 - 2\ln x$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1) a) Vérifier que pour tout x élément de $]0, +\infty[$, $f(x) = x\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x}\right)$. (0,5 point)
   b) En déduire la limite de f en $+\infty$ (on donne $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$). (0,5 point)
   c) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.
   (0,5 point + 0,5 point)

2) Déterminer la fonction dérivée f' de f et montrer que $f'(x) = \frac{x-2}{x}$ pour tout x élément de $]0, +\infty[$. (1,5 points)

3) Déterminer le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation. (2,5 points)

4) Soit $(\triangle)$ la droite d'équation $y = x - 2$.

a) Etudier le signe de $[f(x) - (x-2)]$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$. (1 point)

b) En déduire la position relative de (C_f) par rapport à $(\triangle)$. (0,5 point)

5) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse $x_0 = e$. (1 point)

6) Construire la droite $(\triangle)$, la tangente (T) et la courbe (C_f) sur $]0, 8]$ dans le même repère. (1,5 point)

Données : $e \backsimeq 2,7$; $\ln 2 \backsimeq 0,7$; $\ln 8 \backsimeq 2,1$; $f(2) = -1,4$; $f(3) = -1,2$; $f(4) = 1,2$.

Fin