

<b>Pays</b> : Côte d'Ivoire	<b>Année</b> : 2017	<b>Épreuve</b> : Mathématiques
<b>Examen</b> : Bac, Série C	<b>Durée</b> : 4 h	<b>Coefficient</b> : 5

### EXERCICE 1

On désigne par  $Y$  une variable aléatoire vérifiant les conditions suivantes :

- $Y$  prend les valeurs 1, -1 et 2 avec les probabilités respectives  $e^a$ ,  $e^b$  et  $e^c$  où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison  $r$  tels que :  $a = b - r$  et  $c = b + r$ .
- L'espérance mathématique  $E(Y)$  de  $Y$  est égale à 1.

1. a) Justifie que le couple  $(b, r)$  est solution du système (S)  $\begin{cases} e^b e^{-r} + e^b + e^b e^r = 1 \\ e^b e^{-r} - e^b + 2e^b e^r = 1 \end{cases}$ .

b) Résous le système (S).

c) Déduis de ce qui précède que :  $a = \ln\left(\frac{1}{7}\right)$  et  $c = \ln\left(\frac{4}{7}\right)$ .

2. Justifie que la variance  $V(Y)$  de  $Y$  est égale à  $\frac{12}{7}$ .

3. On marque sur une droite graduée (D) les points A, B et C d'abscisses respectives 1 ; -1 et 2.

On désigne par G le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, 2) et (C, 4).

On note  $(\Gamma)$  l'ensemble des points M de la droite (D) tels que :  $MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2 = 187$  et on

pose :  $h(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$ .

- Calcule l'abscisse du point G.
- Démontre que :  $h(G) = V(Y)$ .
- Détermine l'ensemble  $(\Gamma)$ .

### EXERCICE 2

Dans le plan orienté, on considère un triangle OIJ tel que :  $OI = OJ$  et  $Mes(\widehat{OI}; \widehat{OJ}) = \frac{\pi}{2}$ .

A, B et C sont les milieux respectifs des segments [IJ], [JO] et [OI].

Soit  $r$  la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et  $t$  la translation de vecteur  $\frac{1}{2}\vec{IJ}$ . On pose :  $F = rot$  et  $G = tor$ .

1. Fais une figure. (On prendra :  $OI = 8$  cm).

2. a) Détermine  $F(C)$  et  $G(B)$ .

b) Déduis de ce qui précède la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations F et G.

3. On désigne par  $F^{-1}$  la réciproque de la transformation F.

a) Détermine la nature de la transformation  $GoF^{-1}$ .

b) Détermine  $(GoF^{-1})(O)$ , puis caractérise la transformation  $GoF^{-1}$ .

c) Détermine  $(GoF)(I)$  puis déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de la transformation GOF.

4. On munit le plan du repère orthonormé  $(O, I, J)$  tel que défini précédemment.

Soit  $h$  l'homothétie de centre  $B$  et de rapport  $-2$ . On pose :  $S = hor$ .

- Écris l'affixe de chacun des points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .
- Détermine l'écriture complexe de  $h$  et celle de  $r$ .
- Soit  $g$  l'application complexe associée à  $S$ .

Démontre que :  $\forall z \in \mathbb{C}, g(z) = -2iz - 2 + \frac{3}{2}i$ .

d) Dédus de ce qui précède la nature et les éléments caractéristiques de  $S$ .

## PROBLÈME

On considère la suite  $(t_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $t_n = n - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) + \ln(n!)$ .

Le but de ce problème est d'étudier la convergence de la suite  $(t_n)$  et de démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \ln(\sqrt{2\pi})$$

### Partie I : Étude de la convergence de la suite $(t_n)$

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $\psi$  la fonction définie sur  $] -n ; +\infty[$  par :  $\psi(t) = \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right) - \frac{t}{n}$ .

On suppose que  $\psi$  est dérivable sur  $] -n ; +\infty[$  et on note  $\psi'$  sa fonction dérivée.

1. a) Justifie que :  $\forall t \in ] -n ; +\infty[, \psi'(t) = \frac{-t}{n^2(1+\frac{t}{n})}$ .

b) Calcule  $\psi(0)$ .

c) Dresse le tableau de variation de la fonction  $\psi$  (On ne calculera pas les limites).

d) Dédus de ce qui précède que :  $\forall t \in ] -n ; +\infty[, \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right) \leq \frac{t}{n}$ .

2. a) En utilisant la question 1. d) et en effectuant un changement de variable, démontre que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ln x \leq x - 1.$$

b) Dédus que :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{k} - 1\right) dx = 0$ .

c) Dédus des questions 2. a) et 2. b) que :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{x}{k}\right) dx \leq 0$ .

d) Justifie alors que :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(x) dx \leq \ln(k)$ .

e) En utilisant la relation de Chasles, démontre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln(x) dx \leq \ln(n!).$$

3. a) En utilisant une intégration par parties, démontre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) + \ln(n!) \geq \ln(\sqrt{2}).$$

b) Dédus que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n \geq \ln(\sqrt{2})$ .

4. On définit la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0 ; 1[$  par :  $f(x) = \frac{1}{2x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ .

On admet que :  $\forall x \in ]0 ; 1[ , f(x) \geq 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^* , t_{n+1} - t_n = 1 - f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$ .

- Détermine le sens de variation de la suite  $(t_n)$ .
- Déduis des questions précédentes la convergence de la suite  $(t_n)$ .

### **Partie II : Calcul de la limite de la suite $(t_n)$**

On définit la suite  $(w_n)$  par :

$$w_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* , w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt.$$

1. a) Calcule  $w_1$ .

- Démontre que la suite  $(w_n)$  est décroissante et positive.  
On admettra que la suite  $(w_n)$  est à termes strictement positifs.

c) A l'aide d'une intégration par parties, démontre que :  $\forall n \in \mathbb{N} , w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n$ .

On remarquera que :  $\sin^{n+2}(t) = \sin(t) \times \sin^{n+1}(t)$ .

d) En utilisant les questions 1. b) et 1. c) de la partie II, justifie que :

$$\forall n \in \mathbb{N} , \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{w_{n+1}}{w_n} \leq 1.$$

e) Déduis de ce qui précède  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n}$ .

2. On pose :  $\forall n \in \mathbb{N} , y_n = (n+1)w_{n+1} \times w_n$ .

- Démontre que la suite  $(y_n)$  est constante.
- Déduis de ce qui précède que :  $\forall n \in \mathbb{N} , y_n = \frac{\pi}{2}$ .
- Détermine  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n w_n^2$ .  
(On remarquera que :  $n w_n^2 = \frac{n}{n+1} \times y_n \times \frac{w_n}{w_{n+1}}$ ).

d) Déduis de ce qui précède que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} w_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ .

3. On admet dans toute la suite du problème que, si une suite  $(a_n)$  converge vers  $l$ , alors la suite  $(a_{2n})$  converge aussi vers  $l$ .

a) Déduis de la question 2. c) de la partie II la limite de la suite  $(n w_{2n}^2)$ .

$$(On remarquera que :  $n w_{2n}^2 = \frac{1}{2} (2n w_{2n}^2)$ ).$$

b) En utilisant la question 1. c) de la partie II, démontre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} , w_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

c) Démontre que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* , e^{t_n} = n! \left(\frac{e}{n}\right)^n \times \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

d) En admettant que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* , e^{t_{2n-2t_n}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{n w_{2n}^2}$ , détermine la limite de la suite  $(t_n)$ .