

**BACCALAURÉAT**  
**SESSION 2020**

**Coefficient : 5**  
**Durée : 4 h**

# MATHÉMATIQUES

## SÉRIE C

*Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.*

*Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.*

*Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.*

*Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles à calculs sont également autorisées.*

### EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . L'unité graphique est 2 cm.

On donne les points A, B et C d'affixes respectives  $a$ ,  $b$  et  $c$  telles que :

$$a = 2 - 2i, b = 2 + 2i \text{ et } c = -2 + 2i.$$

- Place les points A, B et C dans le plan muni du repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
  - Démontre que le triangle ABC est rectangle et isocèle.
  - Écris sous forme exponentielle, chacun des nombres complexes  $a$ ,  $b$  et  $c$ .
- Soit  $r$  la rotation de centre O telle que  $r(A) = B$  et  $(\Gamma)$  le cercle de centre  $\Omega$  d'affixe 2 et de rayon 2.

  - Détermine l'application complexe associée à la rotation  $r$ .
  - Déduis de ce qui précède  $r(B)$ .
  - Détermine la nature et les éléments caractéristiques de l'image  $(\Gamma')$  de  $(\Gamma)$  par  $r$ .
  - Construis  $(\Gamma)$  et  $(\Gamma')$  sur la même figure.
- Soit  $\alpha$  un nombre réel appartenant à l'intervalle  $]0; 2\pi[$ , tel que :  $\alpha \neq \pi$ . On note M le point d'affixe  $z$  telle que  $z = 2 + 2ie^{i\alpha}$  et  $M'$  l'image de M par  $r$ . On note  $z'$  l'affixe de  $M'$ .

  - Démontre que M est un point de  $(\Gamma)$ .
  - Démontre que :  $z' = 2i - 2e^{i\alpha}$ .
  - On note  $u$  et  $v$  les affixes respectives des vecteurs  $\overline{BM}$  et  $\overline{BM'}$ .  
Exprime  $u$  et  $v$  en fonction de  $\alpha$ .
- Démontre que :  
 $\forall x \in \mathbb{R}, e^{2ix} + 1 = 2e^{ix} \cos x$  et  $e^{2ix} - 1 = 2ie^{ix} \sin x$ .
  - Démontre que :  $\frac{u}{v} = \tan \frac{\alpha}{2}$ .
  - Déduis de ce qui précède que les points M,  $M'$  et B sont alignés.
- On donne :  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ .

  - Détermine sous forme algébrique l'affixe du point M.
  - Construis les points M et  $r(M)$ .

**EXERCICE 2**

Le sujet du concours d'entrée dans une grande école est noté sur 20 points. Il comporte 5 questions à choix multiples. Pour un candidat donné, on attribue quatre (4) points à chaque réponse juste et zéro (0) point à chaque question non traitée ou à réponse fausse.

On admet que lorsqu'un candidat répond au hasard à une question, la probabilité de donner une réponse juste est  $\frac{1}{4}$ .

1. Soit  $k$  le nombre exact de réponses justes données par un candidat à ce concours. Exprime en fonction de  $k$  la note globale  $N$  de ce candidat.
2. Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de réponses justes obtenues par un candidat qui a répondu au hasard à chacune des cinq questions.
  - a) Détermine les valeurs prises par  $X$ .
  - b) Démontre que :  $P(X = 3) = \frac{45}{512}$ .
  - c) Justifie que la probabilité pour que le candidat ait une note globale supérieure à 10 est :  $\frac{53}{512}$ .
3. On suppose qu'à ce concours,  $n$  candidats ont répondu au hasard aux cinq questions. On admet que lorsqu'un des  $n$  candidats répond au hasard à une question, la probabilité de donner une réponse juste est  $\frac{1}{4}$ .
  - a) Justifie que la probabilité  $P_n$  qu'au moins un des  $n$  candidats ait une note globale supérieure à 10 est :  $1 - \left(\frac{459}{512}\right)^n$ .
  - b) Détermine la valeur minimale de  $n$  pour que :  $P_n \geq 0,99$ .

**PROBLÈME**

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . L'unité graphique est 2 cm.

Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_n(x) = (1-x)^n e^{\frac{x}{2}}$ .

On désigne par  $(C_n)$  la courbe représentative de  $f_n$  dans le plan muni du repère orthonormé  $(O, I, J)$ .

**Le but de ce problème est de calculer la limite de la suite  $(S_n)$  définie par :**

$$S_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

**Partie A : Étude de la fonction  $f_1$  et d'une fonction associée.**

1. a) Calcule :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$ .  
b) Interprète graphiquement les résultats précédents.
2. a) Calcule la limite de  $f_1$  en  $-\infty$ .  
b) Interprète graphiquement le résultat précédent.

3. On suppose que  $f_1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
  - a) Démontre que  $f_1$  est strictement croissante sur  $] -\infty ; -1[$  et strictement décroissante sur  $] -1 ; +\infty[$ .
  - b) Dresse le tableau de variations de  $f_1$ .
  - c) Trace dans le repère  $(O, I, J)$ , la courbe  $(C_1)$  et sa tangente à l'origine.

**Partie B : Etude de la fonction  $f_n$ .**

1. a) Détermine, suivant la parité de  $n$ , la limite de  $f_n$  en  $+\infty$ .  
 b) Détermine, suivant la parité de  $n$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$ .  
 c) Interprète graphiquement les résultats précédents.
2. a) Calcule  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$  (On pourra poser :  $X = 1-x$ ).  
 b) Interprète graphiquement le résultat précédent.
3. On suppose que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $f_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
  - a) Démontre que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = \frac{1}{2} (-x - 2n + 1) (1-x)^{n-1} e^{\frac{x}{2}}$ .
  - b) Étudie, suivant la parité de  $n$ , le signe de  $f_n'(x)$ .
  - c) Dresse, suivant la parité de  $n$ , le tableau de variation de  $f_n$ .
4. a) Résous dans  $\mathbb{R}$ , l'équation :  $f_n(x) = f_{n+1}(x)$ .  
 b) Dédus de ce qui précède que toutes les courbes  $(C_n)$  passent par deux points fixes que l'on précisera.  
 c) Étudie, suivant la parité de  $n$ , les positions relatives des courbes  $(C_n)$  et  $(C_{n+1})$ .  
 d) Trace la courbe  $(C_2)$  dans le repère  $(O, I, J)$ .

**Partie C : Calcul de la limite de la suite  $(S_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $S_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 f_n(x) dx$ .**

1. Justifie que la fonction  $f_n$  est décroissante sur  $[0 ; 1]$ .
2. Démontre que :  $\forall x \in [0 ; 1], f_n(x) \in [0 ; 1]$ .
3. Dédus de ce qui précède que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq S_n \leq \frac{1}{n}$ .
4. Détermine  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .