Pays : Burkina Faso	**Année :** 2016	**Épreuve :** Mathématiques, 1er Tour
Examen : BAC, série D	**Durée :** 4 h	**Coefficient :** 05

EXERCICE 1 (4 *points*)

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 + 8(1-i)z - 20.$$

1. a) Écrire sous forme algébrique $(1-i)^2$ puis en déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2i$.

b) Déterminer les nombres b et c pour que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait : $P(z) = (z^2 + 2i)(z^2 + bz + c)$.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $P(z) = 0$.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1 - i$, $z_B = -1 + i$, $z_C = 1 + 3i$ et $z_D = 3 + i$.

a) Faire une figure.

b) On pose : $Z = \frac{z_{\overrightarrow{BA}}}{z_{\overrightarrow{BC}}}$. Écrire Z sous la forme algébrique.

c) Interpréter géométriquement le module et un argument de Z.

d) Quelle est la nature exacte du triangle ABC puis du quadrilatère $ABCD$?

EXERCICE 2 (4 *points*)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(-1\,;1\,;-3)$; $B(-2\,;3\,;-3)$; $C(-2\,;1\,;0)$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

2. Soit I le point de coordonnées $(-1\,;3\,;0)$.
Calculer la distance de I au plan (ABC).
Les points A, B, C, et I sont-ils coplanaires ?

3. a) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABC en unité d'aire.

b) Déterminer le volume $\mathscr{V}$, en unité de volume, de la pyramide de sommet I et de base le triangle ABC.

PROBLÈME (12 *points*)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{1+x} & si\ x \geq 1 \\ e^{\frac{1}{x-1}} & si\ x < 1 \end{cases}.$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que : $\|\vec{i}\| = 1$ cm et $\|\vec{j}\| = 2$ cm.

Partie A (3,25 *points*)

Soit g la fonction définie sur $I = [1\,;+\infty[$ par : $g(x) = 1 + x - x\ln x$.

1. Calculer les limites de g aux bornes de I.

2. Étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur I.
Vérifier que : $\alpha \in]3,5 ; 4[$.

4. Déduire de ce qui précède le signe de g sur I.

Partie B (**5,75 *points***)

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Étudier la dérivabilité de f en 1.
Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ et vérifier que pour tout $x \in$ I, $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x)^2}$.

4. En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ puis dresser le tableau de variation de f.

5. Montrer que : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$.

6. Construire (C), ses tangentes et ses asymptotes.

Partie C (**3 *points***)

On pose : $J_n = \int_1^2 x^2(\ln x)^n dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer J_0.

2. Montrer que $J_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que (J_n) est décroissante.

4. Montrer que (J_n) est convergente.

5. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n :
$$3J_{n+1} + (n+1)\,J_n = e^3.$$

6. Déduire les valeurs exactes de J_1 et J_2.

Données : $\ln(3,5) \approx 1,25$; $\ln 2 \approx 0,7$; $e^{-1} \approx 0,37$.