Pays : Burkina Faso	**Année** : 2017	**Épreuve** : Maths
Examen : BAC, Remplacement, 1er Tour, Série D	**Durée** : 4 h	**Coefficient** : 5

EXERCICE 1 (04 *points*)

1. *a*) Déterminer le nombre complexe α tel que : $\alpha(1 + i) = 1 + 3i$ puis calculer $i\alpha^2$.

b) Pour tout nombre complexe *z*, on pose : $f(z) = z^2 - (1 + 3i)z - 4 + 3i$.

Montrer que $f(z)$ peut se mettre sous la forme $(z - \alpha)(z - i\alpha)$.

En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation : $f(z) = 0$.

2. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$d'unité graphique 2 cm, on considère les points A et B d'affixes respectives : $a = 2 + i$ et $b = -1 + 2i$.

a) Placer les points A et B dans le repère.

La figure sera complétée au fur et à mesure.

b) Vérifier que $b = ia$ et en déduire la nature exacte du triangle OAB.

c) C est le point d'affixe $c = 1 + \frac{1}{2}i$.

Déterminer l'affixe *d* du point D tel que le triangle OCD soit isocèle et tel que : $mes\left(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}}\right) = \frac{\pi}{2}$.

d) On note J, K, L et M les milieux respectifs des segments [AB], [DA], [CD] et [BC].

Déterminer la nature exacte du quadrilatère JKLM. Justifier.

EXERCICE 2 (04 *points*)

Un jeu consiste à lancer quatre fois de suite, une pièce de monnaie bien équilibrée dont l'une des faces est notée F (Face) et l'autre P (Pile). On lit sur la face supérieure de la pièce. Si l'on obtient F alors on gagne 2 points, si l'on obtient P alors on perd 1 point.

Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de points obtenus à l'issue des quatre lancers.

1. *a*) Déterminer l'univers Ω associé. (On pourra s'aider d'un arbre).

b) Calculer la probabilité d'obtenir 3 fois F (Face).

2. *a*) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Quelle est la probabilité d'obtenir des points strictement inférieurs à 8 ?

d) Déterminer la probabilité p' que la variable aléatoire X prenne une valeur strictement comprise entre -3 et 7.

3. *a*) Calculer l'espérance mathématique de X.

Le jeu est-il favorable au joueur ? Justifier.

b) Calculer la variance V(X) et l'écart-type $\sigma(X)$ de X.

PROBLÈME (12 *points*)

Partie A (02,5 *points*)

1. Soit la fonction *u* définie sur ℝ par : $u(x) = xe^x$.

Étudier le sens de variations de *u* et en déduire que pour tout réel *x*, on a : $xe^x \geq -\frac{1}{e}$.

2. Soit la fonction *g* définie sur]-∞ ; 0] par : $g(x) = 1 - (x^2 + x + 1)e^x$.

a) Étudier le sens de variations de *g*, puis dresser son tableau de variations.

(On ne demande pas la limite de *g* en -∞).

b) Déduire de ce qui précède que : pour tout $x \in$]-∞ ; 0], $g(x) \geq 0$.

Partie B (07,5 *points*)

On considère la fonction *f* définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{xe^x+1} & si\ x \leq 0 \\ f(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) + 1 & si\ x > 0 \end{cases}.$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

1. *a*) Justifier que *f* est définie sur ℝ. (On pourra s'aider de la question **1** de la partie **A**).

b) Étudier la continuité de *f* en 0.

b) Étudier la dérivabilité de *f* en 0. En déduire les conséquences graphiques pour la courbe (C).

2. *a*) Calculer les limites de *f* en -∞ et en +∞.

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation *y* = *x* + 1 est asymptote à la courbe (C) en -∞.

Étudier les positions relatives de (C) par rapport à (Δ) sur]-∞ ; 0].

3. *a*) Étudier le sens de variation de *f* sur]-∞ ; 0], puis sur]0 ; +∞[.

(On pourra montrer que $f'(x)$ et *g*(*x*) ont le même signe sur]-∞ ; 0].)

b) Dresser le tableau de variations de *f*.

4. Soit I le point de (C) d'abscisse – 1.

a) Montrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point I est : $y = \frac{e}{e-1}(x+1)$.

b) Étudier la position de (C) par rapport à (T). (On pourra utiliser le résultat obtenu dans la question **A.1**).

5. Construire la courbe (C), la tangente (T) et l'asymptote (Δ).

Partie C (02 *points*)

1. Soit α un réel tel que : $0 < \alpha < 2$. On désigne par $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 2$.

a) Calculer $\mathcal{A}(\alpha)$ au moyen d'une intégration par parties.

b) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ quand α tend vers 0.

2. On considère la courbe (Γ) définie par le système :

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = e^t(t - ln2) + 1 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

a) Déterminer une équation cartésienne de (Γ).

b) En déduire que (Γ) est une partie de (C) que l'on précisera.