Pays : Burkina Faso	**Année** : 2017	**Épreuve** : Maths
Examen : BAC, Remplacement, 2ème Tour, Série D	**Durée** : 4 h	**Coefficient** : 5

EXERCICE 1 (04 *points*)

On considère la fonction h définie et dérivable sur l'intervalle [0 ; 1] par : $h(x) = 2x - x^2$.

1. *a*) Démontrer que h est strictement croissante sur [0 ; 1].

b) En déduire que l'image de l'intervalle]0 ; 1[par h est l'intervalle]0 ; 1[.

2. Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < 1$.

b) Démontrer que la suite u est croissante.

c) Justifier que la suite u est convergente.

3. On considère la suite v définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \ln(1 - u_n)$.

a) Démontrer que v est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

EXERCICE 2 (04 *points*)

On considère deux points A et D de l'espace. On désigne par I le milieu du segment [AD].

1. Démontrer que pour tout point M de l'espace, on a : $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = MI^2 - IA^2$.

(On pourra utiliser la relation de Chasles).

2. En déduire que l'ensemble E des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = 0$ est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

3. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On donne : A(3 ; 0 ; 0) ; B(0 ; 6 ; 0) ; C(0 ; 0 ; 4) et D(-5 ; 0 ; 1).

a) Vérifier que le vecteur $\vec{n}(4\,;2\,;3)$ est normal au plan (ABC).
b) Calculer la distance du point D au plan (ABC).
c) Calculer l'aire du triangle ABC en unités d'aire.
d) Calculer le volume de la pyramide de sommet D et de base ABC en unités de volume.

4. Soit H le point de coordonnées (-1 ; 2 ; 4).

a) Démontrer que H appartient à l'ensemble E défini en **2**.
b) Vérifier que H est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

PROBLÈME (12 *points*)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x-1)e^{2x} + 1$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A (06 *points*)

1. *a*) Calculer la limite de f en $-\infty$.

En déduire que la courbe (C) admet une asymptote (Δ) dont on précisera une équation.

b) Étudier les positions relatives de (C) et (Δ).

On précisera les coordonnées de A, point d'intersection de (C) et (Δ).

2. *a*) Calculer la limite en $+\infty$ de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$.

b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

5. Construire (Δ), (T) et (C).

Partie B (04 *points*)

1. *a*) Calculer : $I = \int_0^{\frac{1}{2}} [1 - f(x)]\, dx$. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

b) Calculer : $J = \int_{-1}^{0} (2x-1)e^{2x}\, dx$.

c) Calculer : $K = \int_{-1}^{0} (2x-1)^2 e^{4x}\, dx$.

(On pourra utiliser deux intégrations par parties successives).

2. Soit D l'ensemble des points M(x ; y) du plan tels que : $-1 \leq x \leq 0$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

Calculer en cm^3 le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de D autour de l'axe des abscisses. (On pourra exprimer V en fonction de J et K).

Partie C (02 *points*)

Les coordonnées d'un point mobile M dans le repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\ln t}{2} \\ y(t) = -\frac{1+\ln t}{t} + 1 \end{cases}, \quad t \geq 1.$$

a) Déterminer une équation cartésienne de la trajectoire (Γ) de M.

b) Expliquer comment on peut tracer (Γ) à partir de (C).

c) Tracer (Γ) en pointillés dans le repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.