

UNIVERSITE Joseph KI-ZERBO

Office du Baccalauréat

Série D

Année 2020

Session de Remplacement

Epreuve du 2^{ème} tour

Durée : 4 heures

Coefficient : 5

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Cette épreuve comporte deux (2) pages.

Exercice 1 (4 points)

Deux personnes A et B font feu indépendamment sur une cible. La probabilité pour A de toucher la cible est estimée à $\frac{4}{5}$, la probabilité pour B est $\frac{3}{4}$. Quelle est la probabilité pour :

- 1) que les deux tireurs touchent tous deux la cible ? (0,5 point)
- 2) que tous deux manquent la cible ? (0,5 point)
- 3) que la cible soit atteinte par A seulement ? (0,5 point)
- 4) que la cible soit atteinte par B seulement ? (0,5 point)
- 5) que la cible soit touchée par un tireur seulement ? (0,5 point)
- 6) que la cible soit atteinte ? (0,5 point)
- 7) que la cible soit touchée par un tireur au moins ? (1 point)

Exercice 2 (4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1;0;2)$; $B(0;0;1)$ et $C(0;-1;1)$

- 1) Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme. (0,5 point)
- 2) a) Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$. (0,75 point)
b) En déduire l'aire du parallélogramme ABCD. (0,5 point)
- 3) a) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ puis AB et AC. (0,75 point)
b) En déduire la nature exacte du parallélogramme ABCD. (0,5 point)
- 4) a) Calculer la distance d en unité de longueur du point O au plan P passant par A, B et C. (0,5 point)
b) Calculer le volume V en unité de volume de la pyramide de sommet O et de base ABCD. (0,5 point)

Problème (12 points)**Partie A** (7,5 points)

Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x - e^{2x-2}$. On note (C) la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . On prendra 5 cm comme unité.

- 1) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$. (0,5 point)
b) Vérifier que pour tout réel, $f(x) = x \left[1 - 2e^{-2} \left(\frac{e^{2x}}{2x} \right) \right]$. (0,5 point)
c) Déterminer la limite de f en $+\infty$. (0,5 point)

- 2) Déterminer f' , la fonction dérivée de f . Etudier le signe de $f'(x)$ et calculer la valeur exacte du maximum de f . (2 points)
- 3) a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) . (0,5 point)
b) Etudier la position relative de (C) et (Δ) . (0,5 point)
- 4) On note A le point de la courbe (C) d'abscisse 1. Déterminer une équation de la tangente (T) en A à la courbe (C) . (0,5 point)
- 5) a) On note I l'intervalle $[0; 0,5]$. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans I une unique solution qu'on notera par α (0,75 point)
b) Construire la courbe (C) , l'asymptote (Δ) et la tangente (T) . (1,75 point)

Partie B (4,5 points)

On définit dans \mathbb{R} la suite (u_n) par
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = e^{2u_n - 2} \end{cases}$$

- 1) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = e^{2x-2}$. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $g(x) = x$. En déduire $g(\alpha)$. (0,75 point)
 - 2) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I , on a $|g'(x)| \leq \frac{2}{e}$. (1 point)
 - 3) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I , $g(x) \in I$. (0,5 point)
 - 4) Utiliser l'inégalité de la moyenne pour démontrer que pour tout entier naturel n , $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{e} |u_n - \alpha|$. (0,75 point)
 - 5) Démontrer que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n$. (0,5 point)
 - 6) En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite. (0,5 point)
 - 7) Déterminer un entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-5}$. (0,5 point)
- Données : $\ln 2 \simeq 0,7$; $e^{-1} \simeq 0,37$; $e^{-2} \simeq 0,14$; $\ln 10 \simeq 2,3$.

Fin