

Pays : Burkina Faso	Année : 2017	Épreuve : Maths
Examen : BAC, Session normale, 2 ^{ème} Tour, Série D	Durée : 4 h	Coefficient : 5

EXERCICE 1 (04 points)

On considère la suite numérique (U_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{3U_n}{1+2U_n} \end{cases}$$

On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$.

- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $U_n < 1$.
- Démontrer que (U_n) est croissante et convergente.
- On pose $V_n = \frac{U_n}{1-U_n}$ pour tout n de \mathbb{N} .
 - Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - Exprimer V_n en fonction de n . En déduire que : $U_n = \frac{3^n}{1+3^n}$.
 - Calculer la limite de (U_n) .

EXERCICE 2 (04 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 6 cm, on considère la courbe (C) de

représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \frac{\sin^2(t)}{2+\sin t} \end{cases}, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right].$$

- On note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t); y(t))$.
 - Comparer les points $M(t)$ et $M(\pi - t)$.
 - En déduire que l'on peut restreindre le domaine d'étude de (C) à $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
- Montrer que : $y'(t) = \frac{\sin t \cos t (4 + \sin t)}{(2 + \sin t)^2}$.
 - Étudier le sens de variation de x et y sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
 - Dresser le tableau de variation conjoint de x et y sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
- Tracer (C) après avoir placé les points remarquables avec les tangentes associées.

PROBLÈME (12 points)

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = (x+1)e^{1-x} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2}{x} - \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A (09,5 points)

1. a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Calculer les limites de $\frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?

c) Étudier la continuité de f en 1.

2. a) On pose : $X = 1 - x$.

Démontrer que : pour tout $x < 1$, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -2 \left(\frac{e^X-1}{X} \right) + e^X$.

b) On pose : $X = x - 1$.

Démontrer que : pour tout $x > 1$, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{-2}{X+1} - \frac{\ln(X+1)}{X}$.

c) Étudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3. a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 1$, puis étudier son signe.

b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

4. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]1 ; +\infty[$.

Vérifier que : $2,3 < \alpha < 2,4$.

b) Résoudre dans $]-\infty ; 1]$ l'équation $f(x) = 0$.

5. Construire la courbe (C) et ses demi-tangentes.

Partie B (02,5 points)

1. Calculer l'intégrale $\int_1^\alpha \ln x dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

2. Soit \mathcal{A} l'aire en cm^2 du domaine plan délimité par les droites d'équations $x = 1$; $x = \alpha$, l'axe des abscisses et la courbe (C).

Démontrer que :

$$a) \mathcal{A} = (8 - 4\alpha) \ln \alpha + 4\alpha - 4$$

$$b) \mathcal{A} = 4\alpha + \frac{16}{\alpha} - 12.$$

3. On considère un point mobile M dont les coordonnées sont données en fonction du paramètre t par :

$$\begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = -t + 2e^{-t}, t \geq 0. \end{cases}$$

Montrer que la trajectoire de M est une partie de (C) que l'on précisera.