

**Pays :** Côte d'Ivoire  
**Série :** D

**Année :** 2016  
**Durée :** 4 h

**Session :** Mathématiques  
**Coefficient :** 4

### **EXERCICE 1**

- 1- On considère la fonction  $h$  dérivable et définie sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  par :  $h(x) = 2x - x^2$ .
  - a) Démontrer que  $h$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0 ; 1]$ .
  - b) En déduire que l'image de l'intervalle  $[0 ; 1]$  par  $h$  est l'intervalle  $[0 ; 1]$ .
  
- 2- Soit  $u$  la suite définie par :  
 $u_0 = \frac{3}{7}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n)$ .
  - a) Démontrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$ .
  - b) Démontrer que la suite  $u$  est croissante.
  - c) Justifier que la suite  $u$  est convergente.
  
- 3- On considère la suite  $v$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(1 - u_n)$ .
  - a) Démontrer que  $v$  est une suite géométrique de raison 2.
  - b) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
  - c) Calculer la limite de la suite  $v$ .
  - d) En déduire la limite de la suite  $u$ .

### **EXERCICE 2**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ , (unité graphique : 2 cm).

On considère la transformation  $\mathcal{S}$  du plan qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que :

$$z' = \left(1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

- 1- a) Soit  $\Omega$  le point d'affixe 2.  
Vérifier que :  $\mathcal{S}(\Omega) = \Omega$ .  
 b) Justifier que  $\mathcal{S}$  est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.
  
- 2- a) Démontrer que :  $\forall z \neq 2, \frac{z' - z}{2 - z} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$ .  
 b) En déduire que le triangle  $M\Omega M'$  est rectangle en  $M$ .  
 c) Donner un programme de construction de l'image  $M'$  par  $\mathcal{S}$  d'un point  $M$  donné.
  
- 3- a) Placer les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $-1 + i$  et  $5 - i$  dans le plan muni du repère  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ .  
 Construire les images respectives  $A'$  et  $B'$  de  $A$  et  $B$  par  $\mathcal{S}$ .  
 b) On note  $z_A, z_B, z_{A'}$  et  $z_{B'}$  les affixes respectives des points  $A, B, A'$  et  $B'$ .  
 Démontrer que :  $z_{A'} - z_A = z_{B'} - z_B$ .  
 c) En déduire la nature du quadrilatère  $AA'BB'$ .

**PROBLÈME****Partie A**

Soit  $g$  la fonction dérivable et définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = -1 + (2 - 2x)e^{-2x + 3}$ .

- 1- Calculer les limites de  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
- 2- a) Soit  $g'$  la fonction dérivée de  $g$ .  
Justifier que :  $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (4x - 6)e^{-2x + 3}$ .  
b) Étudier le signe de  $g'(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .  
c) Justifier que :  $g\left(\frac{3}{2}\right) = -2$ .  
d) Dresser le tableau de variations de  $g$ .
- 3- a) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  une solution unique notée  $\alpha$ .  
b) Vérifier que :  $0,86 < \alpha < 0,87$ .  
c) Justifier que :  $\forall x \in ]-\infty; \alpha[ , g(x) > 0$  et  $\forall x \in ]\alpha; +\infty[ , g(x) < 0$ .

**Partie B**

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ , (unité graphique : 2 cm).

On considère la fonction  $f$  dérivable et définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = -x + \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x + 3}$ .

On note  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$ .

- 1- a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ .  
b) En déduire que  $(\mathcal{C})$  admet une branche parabolique de direction celle de  $(OJ)$  en  $-\infty$ .
- 2- a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .  
b) Démontrer que la droite  $(\mathcal{D})$  d'équation  $y = -x$  est asymptote à  $(\mathcal{C})$  en  $+\infty$ .  
c) Étudier la position de  $(\mathcal{C})$  par rapport à  $(\mathcal{D})$ .
- 3- a) Soit  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .  
Démontrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$ .  
b) En déduire les variations de  $f$ .  
c) Dresser le tableau de variations de  $f$ . On ne calculera pas  $f(\alpha)$ .
- 4- Construire  $(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{C})$  sur le même graphique.  
On précisera les points de  $(\mathcal{C})$  d'abscisses  $0; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 4$ .  
On prendra :  $\alpha = 0,865$  et  $f(\alpha) = 0,4$ .
- 5- Soit  $t$  un nombre réel strictement supérieur à  $\frac{3}{2}$ . On désigne par  $\mathcal{A}(t)$  l'aire en  $\text{cm}^2$  de la partie du plan limitée par la courbe  $(\mathcal{C})$ , la droite  $(\mathcal{D})$  et les droites d'équations  $x = \frac{3}{2}$  et  $x = t$ .  
On pose :  $I_t = \int_{\frac{3}{2}}^t \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x + 3} dx$ .  
a) À l'aide d'une intégration par parties, justifier que :  $I_t = \frac{3}{4} - \frac{t}{2}e^{-2t + 3}$ .  
b) En déduire  $\mathcal{A}(t)$ .  
c) Calculer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(t)$ .