Pays : Côte d'Ivoire	**Année** : 2017	**Épreuve** : Mathématiques
Examen : Bac, Série D	**Durée** : 4 h	**Coefficient** : 4

EXERCICE 1

Dans le cadre d'un recensement portant sur le nombre de travailleurs dans les champs d'hévéa, un agent à visité huit (8) exploitations. Un exploitant voudrait estimer le nombre de travailleurs que prendrait une exploitation de 16 ha d'hévéa. Pour cela, l'agent recenseur a recueilli les informations consignées dans le tableau ci –dessous.

Nombre *x* de travailleurs	2	4	4	5	7	7	8	8
Superficie exploitée *y* (en ha)	3	5	6	7	10	11	8	12

1. Représente le nuage de points correspondant à la série statistique double (X,Y) dans le plan muni d'un repère orthonormé.

On prendra sur l'axe des abscisses 1 cm pour 1 travailleur et sur l'axe des ordonnées 1cm pour une superficie de 1 ha.

Pour les questions 2) ,3) ,4) et 5), les résultats seront arrondis à l'ordre 2.

2. Justifie que le point moyen à pour couple de coordonnées (5,63 ; 7,75).

3. On note V(X) la variance de X, V(Y) la variance de Y et Cov(X,Y) la covariance de X et Y.

Justifie que : V(X) = 4,18 ; V(Y) = 8,44 et Cov(X,Y) = 5,37.

4. a) Calcule le coefficient de corrélation linéaire ***r*** de la série (X,Y).

b) Interprète le résultat obtenu précédemment.

5. a) Justifie qu'une équation de la droite ($\mathcal{D}$) d'ajustement de Y en X, par la méthode des moindres carrées, est : $y = 1{,}28x + 0{,}54$.

b) Trace ($\mathcal{D}$) sur le graphique précédent.

6. Utilise l'ajustement précédent pour répondre à la préoccupation de l'exploitant.

On donnera l'arrondi d'ordre zéro du résultat.

EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\overrightarrow{u}$, $\vec{v}$).

L'unité graphique est 2 cm.

1. Résous l'équation : $z \in \mathbb{C}, z^2 + (1-3i)z - 4 = 0$.

2. On pose : $\forall\, z \in \mathbb{C},\ P(z) = z^3 + (1-i)z^2 + (2+2i)z - 8i$.

a) Justifie que : P(-2i) = 0.

b) Détermine les nombres complexes a et b tels que : $\forall\, z \in \mathbb{C},\ P(z) = (z+2i)(z^2 + az + b)$.

c) Déduis des questions précédentes les solutions de l'équation : $z \in \mathbb{C},\ P(z) = 0$.

3. Soit A, B et C les points d'affixes respectives $-2i$; $-2+2i$ et $1+i$.

On note D le symétrique de A par rapport au point O.

a) Place les points A, B et C dans le plan complexe.

b) Démontre que le triangle ABC est rectangle et isocèle en C.

c) Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques.

PROBLÈME

Partie A

On considère la fonction f définie sur ℝ par : $f(x) = (1-x^2)e^{-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

L'unité graphique est 2 cm.

1. a) Justifie que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b) Donne une interprétation graphique du résultat obtenu précédemment.

2. a) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

b) Donne une interprétation graphique des résultats obtenus précédemment.

3. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{-x}$.

b) Justifie que :

* $\forall x \in]-\infty\,;\, 1 - \sqrt{2}[\cup]1 + \sqrt{2}\,; +\infty[, f'(x) > 0$;

*$\forall x \in]1 - \sqrt{2}\ ;\ 1 + \sqrt{2}[, f'(x) < 0$.

c) Dresse le tableau de variation de f.

On ne calculera pas $f(1 - \sqrt{2})$ et $f(1 + \sqrt{2})$.

4. Démontre qu'une équation de la tangente (T) à (C) point d'abscisse 0 est : $y = -x + 1$.

5. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (1 + x)e^{-x} - 1$.

On suppose que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note h' sa fonction dérivée.

a) Calcule $h'(x)$.

b) Étudie les variations de h.

c) Calcule $h(0)$ et dresse le tableau de variation de h.

On ne demande pas de calculer les limites de h.

d) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) \leq 0$.

e) Vérifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + x - 1 = (1 - x)h(x)$.

f) Déduis des questions précédentes la position relative de (C) et (T).

6. Trace la tangente (T) et la courbe (C).

On prendra : $f\left(1 - \sqrt{2}\right) = 1{,}3$ et $f\left(1 + \sqrt{2}\right) = -0{,}4$.

<u>Partie B</u>

Soit λ un nombre réel de l'intervalle $]1\,;+\infty[$ et $A(\lambda)$ l'aire en cm² de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$.

1. Démontre, en utilisant deux intégrations par parties, que : $A(\lambda) = \left(\frac{16}{e} - \frac{4(1+\lambda)^2}{e^{\lambda}}\right)$ cm².

2. Détermine la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.