BACCALAURÉAT
SESSION 2018

Coefficient : 4
Durée : 4 h

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.
Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.
Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles à calculs sont aussi autorisées.

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J). L'unité graphique est : 2 cm.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $4i$; 2 et $1 + i\sqrt{3}$.

1. *a*) Écris le nombre complexe $1 + i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique.
b) Place les points A, B et C dans le plan muni du repère (O, I, J).

2. Soit $\mathcal{S}$ la similitude directe de centre O qui transforme B en C.
a) Justifie que l'expression complexe de $\mathcal{S}$ est : $z' = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})z$.
b) Justifie que $\mathcal{S}$ est une rotation dont on précisera une mesure de l'angle.

3. Soit (E) l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que : $|z - 4i| = 2$.
a) Détermine et construis (E).
b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de (E') l'image de (E) par $\mathcal{S}$.

4. Soit (F) l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que : $|z - 2| = |z - 1 - i\sqrt{3}|$.
a) Détermine et construis (F).
b) Justifie que le point O et le point K milieu du segment [BC] appartiennent à (F).
c) Justifie que l'image de (F) par $\mathcal{S}$ est la droite (OJ).

EXERCICE 2

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition. En l'an 2000, l'effectif était égal à mille (1 000).
L'effectif de cette population évolue par rapport au temps t et peut être approché par une fonction f. Le temps t est exprimé en années à partir de 2000. La fonction f est dérivable, strictement positive sur l'intervalle $[2000\,;+\infty[$ et est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1): \quad y'(t) + \frac{1}{200}y(t) = -\frac{200}{t^2} + \frac{1}{t}.$$

1. Soit h la fonction dérivable et définie sur l'intervalle $[2000\,;+\infty[$ par : $h(t) = \dfrac{200}{t}$.

Vérifie que h est une solution de (E_1).

2. Résous l'équation différentielle

$$(E_2): \quad y'(t) + \frac{1}{200}y(t) = 0.$$

3. *a*) Démontre qu'une fonction g est solution de (E_1) si et seulement si $g - h$ est solution de (E_2).
b) Déduis-en les solutions de (E_1).
c) Sachant que $f(2000) = 1000$, vérifie que :

$$\forall\, t \in [2000\,;+\infty[,\quad f(t) = 999{,}9\, e^{\left(10-\frac{t}{200}\right)} + \frac{200}{t}.$$

d) Détermine le nombre d'individus de cette population animale en 2020.
Donne le résultat arrondi à l'ordre 0.

PROBLÈME

Partie A

On considère la fonction g dérivable et définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :
$g(x) = 2 + x - 3x\ln(x)$.

1. Calcule la limite de g en 0 et la limite de g en $+\infty$.

2. *a*) On désigne par g', la fonction dérivée de g.
Calcule $g'(x)$ pour tout nombre réel x strictement positif.
b) Étudie les variations de g.
c) Vérifie que : $g\left(e^{-\frac{2}{3}}\right) = 2 + 3e^{-\frac{2}{3}}$.
Dresse le tableau de variation de g.

3. *a*) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet dans l'intervalle $\left[e^{-\frac{2}{3}}\,;+\infty\right[$, une solution unique notée α.

b) Justifie que : $1{,}9 < \alpha < 2$.

4. Démontre que : $\forall\, x \in\,]0\,;\alpha[,\ g(x) > 0$ et $\forall\, x \in\,]\alpha\,;+\infty[,\ g(x) < 0$.

Partie B

Soit f la fonction dérivable et définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{20\ln(x)}{(x+2)^3}$.

$(\mathscr{C})$ désigne la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 5 cm.

1. *a)* Calcule la limite de f en 0.
Interprète graphiquement le résultat.
b) Justifie que la limite de f en $+\infty$ est égale à 0.
Interprète graphiquement le résultat.

2. On note f' la fonction dérivée de f.
a) Démontre que :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad f'(x) = \frac{20g(x)}{x(x+2)^4}.$$

b) Déduis-en les variations de f.
c) Dresse le tableau de variation de f. *On ne calculera pas $f(\alpha)$.*

3. Justifie qu'une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1 est : $y = \dfrac{20}{27}x - \dfrac{20}{27}$.

4. Trace (T) et $(\mathscr{C})$. On prendra $\alpha = 1{,}95$ et $f(\alpha) = 0{,}22$.

Partie C

On pose : $\mathrm{U} = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+2)^2}\,dx$ et $\mathrm{V} = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{(x+2)^3}\,dx$.

1. On admet que : $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ \dfrac{1}{x(x+2)^2} = \dfrac{1}{4x} - \dfrac{1}{4(x+2)} - \dfrac{1}{2(x+2)^2}$

Déduis-en que : $\mathrm{U} = \dfrac{\ln 3}{4} - \dfrac{\ln 2}{4} - \dfrac{1}{24}$

2. *a)* À l'aide d'une intégration par parties, démontre que : $\mathrm{V} = -\dfrac{\ln 2}{32} + \dfrac{1}{2}\mathrm{U}$.

b) Calcule en cm² l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe (OI), les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
Donne le résultat arrondi à l'ordre 1.