grandprof contacts: Whatsapp/Telegram/call 00237679775139

| | | |
|---|---|---|
| **Pays :** Burkina Faso | **Année :** 2015 | **Session :** normale, 1er Tour |
| **Série :** BAC, série D | **Durée :** 4 h | **Coefficient :** 5 |

## Exercice 1

Soit le polynôme $P(z)=z^3-(1+2i)z^2-3z+2i-1,\ z\in\mathbb{C}$.

**1.** Montrer que le polynôme P($z$) admet une racine réelle $z_0$ que l'on déterminera.

**2.** Déterminer trois nombres complexes $a$, $b$ et $c$ tels que $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$.

**3.** Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

**4.** Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\ \vec{v})$ (unité 2 cm),

on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $i$ ; $2 + i$ et $-1$.

*a*) Placer les points A, B et C.

*b*) Soit D l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Calculer l'affixe de D.

*c*) Calculer le nombre complexe $Z = \frac{z_A}{z_A - z_B}$.

Déterminer le module et un argument de $Z$. En déduire la nature du triangle OAB.

## Exercice 2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$, on donne les points

A(−2 ; −1 ; 2), B(6 ; −5 ; 3), C(−1 ; 3 ; 10) et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\-7\\4\end{pmatrix}$.

**1.** *a*) Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

*b*) Interpréter géométriquement ces résultats.

*c*) Calculer les distances AB et AC.

*d*) En déduire la nature exacte du triangle ABC.

**2.** Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

**3.** Montrer que $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\| = 9\left\|\vec{u}\right\|$ et en déduire l'aire du triangle ABC en

fonction de la norme de $\vec{u}$.

**4.** Soit D(1 ; 1 ; 1) un point de l'espace.

*a*) Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires ?

*b*) Calculer $d$(D, (ABC)) et en déduire le volume $\mathcal{V}$, en unité de volume, de la pyramide de sommet D et de base le triangle ABC.

## Problème

### *Partie A*

On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=(1-x)e^x-1$.

**1.** Étudier les variations de $g$.

**2.** Calculer $g(0)$. En déduire que pour tout $x$ non nul, on a : $g(x) < 0$.



www.grandprof.net

grandprof contacts: Whatsapp/Telegram/call 00237679775139

***Partie B***

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{x}{e^x-1}+2 \text{ si } x\neq 0,$$

$$f(0)=3.$$

On désigne par ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\ \vec{j}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

On admettra que $f$ est dérivable en 0 et que $f'(0)=-\frac{1}{2}$.

**1.** *a*) Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$.

*b*) Établir que $\frac{x}{e^x-1}=\frac{x}{e^x}\times\frac{1}{1-e^{-x}}$ puis déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

En déduire que ($\mathscr{C}$) admet une asymptote horizontale en $+\infty$ dont on donnera une équation.

**2.** Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe ($\mathscr{C}$) en $-\infty$.

**3.** Calculer, pour tout $x$ non nul, $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=\frac{g(x)}{\left(e^x-1\right)^2}$.

**4.** *a*) Donner le sens de variations de $f$.

*b*) Dresser le tableau de variations de $f$.

**5.** Soit (T) la tangente à ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse nulle. Écrire une équation de (T).

**6.** Tracer (D), (T) et ($\mathscr{C}$).

***Partie C***

Soit la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - x$.

**1.** Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ telle que $\alpha\in]2\,;2\,;5[$.

**2.** On pose : I = [2 ; 2,5].

*a*) Démontrer que pour tout $x$ de I, on a : $g(x) \geq -20$ et $e^x - 1 \geq 40$.

*b*) En déduire que si $x\in$I, $-\frac{1}{2}\leq f'(x)\leq 0$.

**3.** Soit $(U_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

*a*) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $U_n\in$I.

*b*) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left|U_{n+1}-\alpha\right|\leq\frac{1}{2}\left|U_n-\alpha\right|$ et $\left|U_n-\alpha\right|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

*c*) En déduire que $(U_n)$ convergence vers $\alpha$.

*d*) Déterminer le plus petit entier $n_0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $\left|U_n-\alpha\right|\leq 10^{-3}$.

On donne : $\ln 2 \approx 0{,}69$ ; $\ln 10 \approx 2{,}3$ ; $e^2 \approx 7{,}39$ ; $e^{2,5} \approx 12{,}18$ ; $\frac{1}{e^2-1} \approx 0{,}15$ ;

$\frac{1}{e^{2,5}-1} \approx 0{,}09$ ; $(e^2-1)^2 \approx 40{,}83$ ; $(e^{2,5}-1)^2 \approx 125$.



www.grandprof.net