**BACCALAUREAT** | **Coefficient : 5**
**SESSION 2020** | **Durée : 4 H**

# MATHEMATIQUES

## SERIE E

*Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1/2 et 2/2.*
*Chaque candidat recevra une (01) feuille de papier millimétré.*
*L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.*

### EXERCICE 1

Soit ABC un triangle du plan.

1. a) Déterminer et construire le point G, barycentre des points pondérés (A ,1) ; (B,-1) et (C, 1).
   b) Déterminer et construire le point G', barycentre des points pondérés (A ,1) ; (B,5) et (C, –2).

2. Soit J le milieu de [AB].
   a) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{GG'}$ et $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis en déduire que le point J est le point d'intersection des droites (GG') et (AB).
   b) Démontrer que le barycentre I des points pondérés (B,2) et (C,-1) appartient à (GG').

3. Soit D un point quelconque du plan n'appartenant pas à la droite (AC).
   Soit O le milieu de [CD] et K le milieu de [OA].
   a) Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que K soit le barycentre de (A, a); (D, b) et (C, c).
   b) Soit E le point d'intersection des droites (DK) et (AC).
   Démontrer que E est le barycentre des points pondérés (A, 2) et (C, 1).

### EXERCICE 2

L'objectif est d'étudier la suite u définie par : $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ et pour $n \geqslant 1$, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

1. Soit f la fonction numérique définie sur [0 ; 1] par : $f(x) = \ln( x + \sqrt{1+x^2})$.
   a) Calculer $f'(x)$ et en déduire $u_0$. $f'$ étant la dérivée de f.
   b) Calculer $u_1$.

2. On ne cherchera pas à calculer $u_n$
   a) Démontrer que la suite $(u_n)$ est décroissante et en déduire qu'elle converge.
   b) Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [0 ; 1],
   on a : $1 \leqslant \sqrt{1+x^2} \leqslant \sqrt{2}$.
   En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. (1)
   c) Déterminer la limite de $(u_n)$.

3. Pour tout entier naturel n≥3, on pose $I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}dx$.

   a) Justifier que : $\forall\ n \geq 3,\ u_n + u_{n-2} = I_n$.

   b) A l'aide d'une intégration par parties de $I_n$, démontrer que : $\forall n \geq 3,\ nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$.

   c) En déduire que : $\forall\ n \geq 3,\ (2n-1)u_n \leq \sqrt{2}$. (2)

   d) A l'aide des inégalités (1) et (2), démontrer que : $\forall\ n \geq 3,\ \frac{n}{(n+1)\sqrt{2}} \leq nu_n \leq \frac{n\sqrt{2}}{2n-1}$

   En déduire que la suite $(nu_n)$ est convergente.

**PROBLEME**

n est un nombre entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique $f_n$ définie sur [0 ; 1] par : $\begin{cases} f_n(x) = x^2(\ln x)^n \ si\ x \in ]0,1] \\ f_n(0)=0 \end{cases}$

On désigne par $(C_n)$, la courbe représentative de $f_n$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique 10 cm.

Partie A

1. Démontrer que $f_n$ est dérivable à droite en 0.

2. a) Démontrer que : $\forall\ n > 0,\ 0 < e^{-\frac{n}{2}} < 1$.

   b) Résoudre dans ]0 ; 1], l'inéquation : $\ln x + \frac{n}{2} < 0$.

3. a) Démontrer que : $\forall x \in ]0\ ;1],\ f_n'(x) = 2x(\ln x)^{n-1}(\ln x + \frac{n}{2})$

   b) Etudier suivant les valeurs de n, les variations de $f_n$ puis dresser son tableau de variation (On distinguera trois cas : n =1, n pair et n impair)

4. a) Démontrer que toutes les courbes $(C_n)$ passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées.

   b) Construire $(C_1)$ et $(C_2)$ dans le même repère.

Partie B

t désigne un nombre réel appartenant à [0 ; 1]. On pose $I_n(t) = \int_t^1 f_n(x)dx$ et $L_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

On admet que $L_n = \lim\limits_{t \to 0} I_n(t)$.

1. Soit F la fonction dérivable et définie sur [0 ;1] par : $\begin{cases} F(x) = \frac{x^3}{3}(\ln x) - \frac{x^3}{9}\ si\ x \in ]0,1] \\ F(0) = 0 \end{cases}$

   a) Démontrer que F est une primitive de $f_1$ sur [0 ; 1].

   b) Calculer $L_1$.

2. Soit $\varphi_n$ la fonction définie sur ]0 ; 1] par $\varphi_n(t) = -\frac{1}{3}t^3(\ln t)^n$.

   a) Calculer la limite de $\varphi_n$ en 0.

   b) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\forall\ t \in [0\ ;1], I_{n+1}(t) = \varphi_{n+1}(t) - \frac{n+1}{3}I_n(t)$

   c) En déduire que : $L_{n+1} = -\frac{n+1}{3}L_n$.

   d) Démontrer par récurrence que : $\forall\ n \geq 1,\ L_n = (-1)^n \frac{n!}{3^{n+1}}$.

3. Calculer en fonction de n, l'aire A(n) de la partie du plan délimitée par $(C_n)$ ; l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x= 1.