Pays : Sénégal	**Année** : 2017	**Épreuve** : Mathématiques
Examen : BAC, 1er Gpe, Séries S2	**Durée** : 4 h	**Coefficient** : 5

EXERCICE 1 (04 *points*)

1. On considère l'équation (E) : $z^3 - 13z^2 + 59z - 87 = 0$, où z est un nombre complexe.

a) Déterminer la solution réelle de (E).

b) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2. On pose : $a = 3$, $b = 5 - 2i$ et $c = 5 + 2i$.

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c. Soit M le point d'affixe z distinct de A et de B.

a) Calculer $\frac{b-a}{c-a}$. En déduire la nature du triangle ABC.

b) On pose : $Z = \frac{z-3}{z-5+2i}$.
Donner une interprétation géométrique de l'argument de Z.
En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre réel non nul.

3. Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC et I le point d'affixe $2 - i$.

a) Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre I et d'angle $\frac{-\pi}{2}$.

b) Déterminer l'image (C') de (C) par r. Construire (C').

EXERCICE 2 (06 *points*)

A l'occasion de ses activités culturelles, le FOSCO d'un lycée organise un jeu pour le collectif des professeurs. Une urne contenant 4 boules rouges et une boule jaune indiscernables au toucher est placée dans la cour de l'école. Chaque professeur tire simultanément 2 boules de l'urne.

- Si les 2 boules sont de même couleur, il les remet dans l'urne et procède à un second tirage successif avec remise de 2 autres boules.

- Si les 2 boules sont de couleurs distinctes, il les remet toujours dans l'urne, mais dans ce cas le second tirage de 2 autres boules s'effectue successivement sans remise.

1. Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : « Le professeur tire 2 boules de même couleur au premier tirage. »

B : « Le professeur tire 2 boules de couleurs distinctes au premier tirage. »

C : « Le professeur tire 2 boules de même couleur au second tirage sachant que les boules tirées au premier tirage sont de même couleur. »

D : « Le professeur tire 2 boules de même couleur au second tirage sachant que les boules tirées au premier tirage sont de couleurs distinctes. »

E : « Le professeur tire 2 boules de couleurs distinctes au second tirage sachant que les boules tirées au premier tirage sont de couleurs distinctes. »

F : « Le professeur tire 2 boules de couleurs distinctes au premier et au second tirage. »

2. Pour le second tirage, chaque boule rouge tirée fait gagner au FOSCO 1 000 F et chaque boule jaune tirée fait gagner au collectif des professeurs 1 000 F.

Soit X la variable aléatoire à laquelle on associe le gain obtenu par le FOSCO.

a) Déterminer les différentes valeurs prises par X et sa loi de probabilité.
b) Déterminer la fonction de répartition de X.

3. Étant donné que le collectif est composé de 50 professeurs qui ont tous joué indépendamment et dans les mêmes conditions, déterminer la probabilité des évènements suivants :

G : « Le FOSCO réalise un gain de 100 000 F. »

H : « Le collectif des professeurs réalise un gain de 100 000 F. »

I : « Le FOSCO réalise autant de gains que de pertes. »

PROBLÈME (10 *points*)

Partie A

Soit g la fonction définie par : $g(x) = -2\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$.

1. *a*) Déterminer D_g, puis calculer les limites de g aux bornes de D_g.

b) Calculer $g'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations de g.

2. *a*) Calculer $g(0)$.

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une notée α appartient à l'intervalle $]-0{,}72\ ;\ -0{,}71[$.

b) Déterminer le signe de $g(x)$.

Partie B

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(x+1)} \; si \; x > -1 \; et \; x \neq 0 \\ f(x) = (1+x)e^{-x-1} \; si \; x \leq -1 \\ f(0) = 0 \end{cases}.$$

1. *a*) Montrer que $D_f = \mathbb{R}$ et calculer les limites de f aux bornes de D_f.

b) Étudier la nature des branches infinies.

2. *a*) Étudier la continuité de f en – 1 et en 0.
b) Étudier la dérivabilité de f en – 1 et en 0 et interpréter graphiquement les résultats.

3. *a*) Montrer que pour tout $x \in$]- 1, +∞[et $x \neq 0$, on a : $f'(x) = \frac{-xg(x)}{ln^2(x+1)}$.

Calculer $f'(x)$ sur]- $\infty, -1$[.

b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

4. Soit h la restriction de f à [0, +∞[.

a) Montrer que h réalise une bijection de [0, +∞[sur un intervalle J à préciser.

b) Donner le sens de variation de h^{-1}.

c) Construire C_f et $C_{h^{-1}}$.

Partie C

Soit m la fonction définie par : $m(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2} - \frac{1}{x(x+1)}$.

1. Déterminer les fonctions u et v telles que pour tout $x \in$]0, +∞[, on ait :
$m(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

2. *a*) En déduire la fonction H définie sur]0, +∞[et telle que : $H'(x) = m(x)$.

b) Calculer $\int_1^2 \frac{1}{f(x)} dx$.