Pays : Sénégal	**Année :** 2015	**Session :** normale, 1er Groupe
Série : BAC, série S_2	**Durée :** 4 h	**Coefficient :** 5

Exercice 1

Les questions **1.**, **2.** et **3.** de cet exercice sont faites chacune de quatre affirmations. Dire pour chacune de ces affirmations si elle et vraie ou fausse.

1. L'évènement contraire de « A sachant B » est :

a) $\overline{\mathrm{A}}$ sachant B | *b*) A sachant $\overline{\mathrm{B}}$

c) $\overline{\mathrm{A}}$ sachant $\overline{\mathrm{B}}$ | *d*) $\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}$.

2. Soient E et F deux événements indépendants d'un même espace probabilisé, on a :

a) $p(\mathrm{E}/\mathrm{F}) = 0$ | *b*) $p(\mathrm{E} \cup \mathrm{F}) = p(\mathrm{E}) \times p(\overline{\mathrm{F}}) + p(\mathrm{F})$

c) $p(\mathrm{E} \cap \mathrm{F}) = 0$ | *d*) $p(\mathrm{E}/\mathrm{F}) = 1$.

3. Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p où $n = 4$ et $p \in]0\,;1[$.

a) Si $p = \frac{1}{2}$, alors $p(\mathrm{X} = 2) = 2p(\mathrm{X} = 1)$.

b) Si $p = \frac{1}{4}$, alors $p(\mathrm{X} = 3) > \frac{1}{4}$.

c) Si $p = \frac{1}{2}$, alors $p(\mathrm{X} > 1) = 1$.

d) Si $p(\mathrm{X} = 1) = 8p(\mathrm{X} = 0)$, alors $p = \frac{2}{3}$.

4. Le plan (P) est rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{u},\ \vec{v}\right)$. A et B sont deux points du plan (P) d'affixes respectives z_{A} et z_{B}. Considérons M et M' deux points du plan (P) distincts de A et B. Notons z et z' les affixes respectives de M et M'.

Interpréter géométriquement les résultats ci-dessous :

a) $|z - z_{\mathrm{A}}| = 1$ | *b*) $|z - z_{\mathrm{A}}| = |z - z_{\mathrm{B}}|$

c) $|z'| = |z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}}|$ | *d*) $\arg\left(\frac{z - z_{\mathrm{A}}}{z - z_{\mathrm{B}}}\right) = \arg\left(\frac{z' - z_{\mathrm{A}}}{z' - z_{\mathrm{B}}}\right) \quad [\pi]$.

Exercice 2

1. Soit $p(z) = z^3 + 3z^2 - 3z - 5 - 20i,\ z \in \mathbb{C}$.

a) Démontrer que $2 + i$ est une racine de $p(z)$.

b) En déduire les solutions de l'équation $p(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

2. Dans le plan (P) rapporté au repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $2 + i$, $-1 - 2i$ et $-4 + i$.

a) Placer les points A, B et C puis calculer les distances AB et BC.

b) Démontrer que $\arg\left(\frac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{BA}},\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}\right) \quad [\pi]$.

c) En déduire une mesure en radian de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}},\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)$.

d) Déduire de tout ce qui précède la nature du triangle ABC.

3. Soit r la rotation qui laisse invariant le point B et qui transforme A en C.

a) Montrer que l'application f associée à r est définie par : $f(z) = iz - 3 - i$.

b) Préciser les éléments géométriques caractéristiques de r.

4. Soit $\mathrm{T} : \mathrm{M}(z) \mapsto \mathrm{M}'(z')$ telle que $z' = i\alpha^2 z + \alpha,\ \alpha \in \mathbb{C}$.

a) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles T est une homothétie de rapport 2.

b) Déterminer les éléments géométriques caractéristiques de T pour le nombre complexe α vérifiant $|\alpha| = \sqrt{2}$ et $\arg\alpha = -\frac{\pi}{4}$.

5. On considère la transformation $g = r\mathrm{o}\mathrm{T}$. On suppose dans ce qui suit que $\alpha = 1 - i$.

a) Montrer que l'application h associée à g est définie par : $h(z) = 2iz - 2$.

b) Donner les éléments géométriques caractéristiques de g.

Exercice 3

Au Sénégal, une entreprise veut vérifier l'efficacité de son service de publicité. Elle a relevé chaque mois durant une période de 6 mois les sommes X consacrées à la publicité et le chiffre d'affaires constaté Y (X et Y sont en milliards de FCFA).

On donne le tableau ci-dessous :

Rang du mois	1	2	3	4	5	6
X	1,2	0,5	1	1	1,5	1
Y	1	4	100	125	148	181

Les résultats seront donnés au centième près.

Le détail des calculs n'est pas indispensable. On précisera les formules utilisées.

1. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.

2. *a*) Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X.

b) Déterminer la somme qu'il faut investir en publicité si l'on désire avoir un chiffre d'affaires de 300 milliards si cette tendance se poursuit.

Exercice 4

A) **1.** En utilisant une intégration par parties, calculer pour tout nombre réel α :

$$\mathrm{I}(\alpha) = \int_0^\alpha e^t (t+2)\,dt.$$

En déduire I(x).

2. Soit k une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Considérons la fonction h telle que

$h(x) = k(x)e^{-x},\ \forall x \in \mathbb{R}$.

On se propose de déterminer la fonction h de façon à ce qu'elle vérifie les conditions suivantes, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} h'(x) + h(x) = x + 2 \\ h(0) = 2 \end{cases}.$$

a) Vérifier que : $k'(x) = (x+2)e^x$.

b) En déduire k puis h.

B) I) **1.** Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction g définie par : $g(x) = x + 1 + e^{-x}$.

2. En déduire que $g(x)$ est strictement positif.

II) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln\left(x + 1 + e^{-x}\right)$.

($\mathscr{C}_f$) est sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\ \vec{j}\right)$.

1. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.

2. Pour tout x strictement positif, on note M, le point de la courbe de la fonction logarithme népérien d'abscisse x et N le point de ($\mathscr{C}_f$) de même abscisse.

a) Démontrer que $0 < \overline{\mathrm{MN}} < \ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$.

b) Quelle est la limite de $\overline{\mathrm{MN}}$ quand x tend vers $+\infty$?

3. *a*) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x + \ln\left(xe^{x} + e^{x} + 1\right)$.

b) En déduire que ($\mathscr{C}_f$) admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $-\infty$ et déterminer la position de ($\mathscr{C}_f$) par rapport à (Δ) pour $x < -1$.

4. Construire ($\mathscr{C}_f$) et (Δ) dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\ \vec{j}\right)$.