

Pays : Mali

Année : 2014

Épreuve : Mathématiques

Examen : BAC, série SE

Durée : 4 h

Coefficient : 4

EXERCICE 1 (6 points)**Partie I**

On se place dans le corps \mathbb{C} des nombres complexes, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\forall z \in \mathbb{C}, h_n(z) = z^n(1 - z).$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre l'équation : $h_n(z) = h_0(z)$.

2. On se propose de résoudre le système suivant : (1) $\begin{cases} h_n(z) = 1 \\ |z| = |1 - z| \end{cases}$.

a) Montrer que l'équation $|z| = |1 - z|$ a une infinité de solutions.

b) Soit z_0 l'une de ces solutions.

Calculer, en fonction du module ρ et l'argument θ de z_0 , l'argument de $1 - z_0$;
le module et l'argument de $z_0^n(1 - z_0)$.

c) En déduire que le système (1) n'admet de solution que si $n \equiv 1[6]$.
Quel est l'ensemble des solutions du système ?

Partie II

1. On considère dans \mathbb{Z}^2 l'équation (E) : $11x + 8y = 79$.

a) Montrer que si $(x ; y)$ est solution de (E) alors $y \equiv 3[11]$.

b) Résoudre alors l'équation (E).

2. Le prix total de 41 pièces détachées réparties en trois lots est de 48 000 F.

Le prix d'une pièce du 1^{er} lot est 4 800 F, le prix d'une pièce du 2^{ème} lot est 3 600 F et le prix d'une pièce du 3^{ème} lot est 400 F.

Déterminer le nombre de pièces de chaque lot.

NB : On pourra utiliser l'équation (E). Les parties I/ et II/ sont indépendantes.

EXERCICE 2 (4 points)**Partie I**

Dans une classe de terminale, la taille moyenne des élèves est de 167 cm. La taille moyenne des filles est de 160 cm et la taille moyenne des garçons est de 173,5 cm. Quelle est l'effectif de la classe sachant qu'il est compris entre 50 et 60 ?

Partie II

Le vieux Balla a laissé son héritage dans un coffre dont la combinaison comporte les cinq chiffres x, y, z, t et h dans cet ordre, du système décimal. Il a mentionné sur son testament que sa fortune reviendrait à celui de ses héritiers qui trouverait la combinaison à partir des données suivantes :

- le 1^{er} chiffre est pair ;
- la somme des deux premiers chiffres est 15 ;
- le troisième est la différence des deux premiers (le 1^{er} moins le 2^{ème}) ;
- le 1^{er} chiffre est le produit du troisième par le quatrième ;
- le nombre est divisible par 9.

Quelle est la combinaison cherchée ?

NB: Les parties I/ et II/ sont indépendantes.

PROBLÈME (10 points)**Partie A**

Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R} par : $\varphi(x) = (x^2 + x + 1) e^{-x} - 1$.

1. a) Déterminer les limites de φ en $-\infty$ puis en $+\infty$.

Interpréter graphiquement le résultat de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$.

b) Calculer $\varphi'(x)$ et étudier son signe.

Dresser le tableau de variation de φ .

2. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans \mathbb{R} , dont l'une notée α est dans $[1 ; +\infty[$. Vérifier que : $1,79 < \alpha < 1,80$.

3. En déduire le signe de φ sur \mathbb{R} .

Partie B

On donne les fonctions f et g définies par : $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$ et $g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

Leurs courbes sont respectivement notées (\mathcal{C}_f) et (\mathcal{C}_g) .

1. Déterminer les domaines de définition de f et de g puis calculer leurs limites aux bornes de ces domaines de définition.

2. Montrer que (\mathcal{C}_f) et (\mathcal{C}_g) admettent au point $A(0 ; 1)$ une tangente commune (T).
Donner une équation cartésienne de (T).

3. a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$, où φ est la fonction définie dans la partie A.

b) Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

c) En déduire la position relative des courbes (\mathcal{C}_f) et (\mathcal{C}_g) .

4. a) Déterminer une primitive G de la fonction g sur \mathbb{R} .

b) Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie

par $F(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit une primitive de f sur \mathbb{R} .

c) Déduire une primitive H de $f - g$ sur \mathbb{R} .

d) Calculer l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par les courbes (\mathcal{C}_f) et (\mathcal{C}_g) et les droites d'équations : $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 0$.

NB : Les tracés de (\mathcal{C}_f) et (\mathcal{C}_g) ne sont pas demandés.