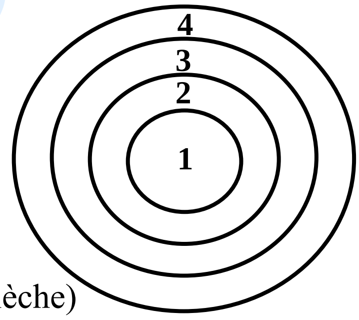
Pays : Mali	**Année :** 2015	**Épreuve :** Mathématiques
Examen : BAC, série SE	**Durée :** 4 h	**Coefficient :** 4

EXERCICE 1 $(5\ points)$

I. Une cible est constituée de cercles concentriques de rayons respectifs 1, 2, 3, 4 déterminant 4 zones numérotées $(1), (2), (3), (4)$ (chaque zone est une couronne), on considère l'extérieur de la cible comme une 5ème zone.

1. Un joueur lance une flèche. La probabilité d'atteindre l'une des zones 1, 2, 3, 4 est proportionnelle à l'aire de cette zone. (**Rappel** : l'aire d'un disque de rayon **r** est $\mathbf{A} = \pi r^2$). Montrez que les probabilités p_1, p_2, p_3, p_4 d'atteindre respectivement les zones (1), (2), (3), (4) sont égales à K, 3K, 5K, 7K où K est un nombre que l'on ne demande pas de calculer dans cette question.

2.
- Si la flèche touche la zone (1), le joueur gagne 4 000 FCFA
- Si la flèche touche la zone (2), le joueur gagne 3 000 FCFA
- Si la flèche touche la zone (3), le joueur gagne 2000F CFA
- Si la flèche touche la zone (4), le joueur gagne 1 000 FCFA
- Si la flèche touche la zone (5), le joueur perd 30 000 FCFA.



On suppose que l'espérance mathématique de X est nulle.
On appelle X le gain obtenu à l'issue d'une partie (lancée d'une flèche)

a) Déterminez les probabilités p_1, p_2, p_3, p_4 et la probabilité p_5 de manquer la cible.

b) Donnez sous forme de tableau la loi de probabilité de X.

II. Trois villages désignés par les lettres A, B et C sont disposés en triangle comme suit : le village A est à 4 km de B, à 3 km de C et le village B est à 5 km de C.
Ces trois villages décident de creuser un forage situé à égale distance des villages, déterminez son emplacement en précisant la distance qui le sépare de chacun des villages.

EXERCICE 2 $(5\ points)$

1. α et β sont deux entiers naturels et $N = 2^{\alpha} \times 3^{\beta}$ tels que le nombre de diviseurs de N^2 est le triple du nombre de diviseurs de N.

a) Prouvez que $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$.

b) Déduisez-en les valeurs de N.

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\ ; \vec{u}\ ; \vec{v})$et **C** désigne l'ensemble des nombres complexes. Soient A, B et C trois points d'affixes respectives :
$a = -1 + 3i$, $b = -4 + 2i$ et $c = 1 + 4i$.
Soit f la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = (2 - 2i)z + 1$.

a) Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de f.

b) Déterminez l'affixe du point $\boldsymbol{B'}$ image de $\boldsymbol{B}$ par la transformation $\boldsymbol{f}$.

Vérifiez que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB'}$ sont orthogonaux.

3. Soit $\boldsymbol{M(x\,;y)}$ où $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont des entiers relatifs et $\boldsymbol{M'}$ son image par $\boldsymbol{f}$.

a) Montrez que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $\boldsymbol{x + 3y = 2}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $\boldsymbol{x + 3y = 2}$ et en déduire l'ensemble des points $\boldsymbol{M}$ dont les coordonnées sont des entiers appartenant à $[-\boldsymbol{5}\,;\,\boldsymbol{5}]$.

PROBLÈME (10 *points*)

A. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

1. On désigne par $M(x\,;\,y)$ un point du plan, $M_1(x_1\,;\,y_1)$ son image par la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = x$ et $M'(x'\,;\,y')$ l'image de M_1 par la symétrie orthogonale d'axe $(O\,;\,\vec{\imath})$.
   - **a)** Exprimez x' et y' en fonction de x et y.
   - **b)** Caractérisez l'application qui transforme M en M'.
   - **c)** On désigne par $\boldsymbol{r}$ l'application qui au point M(x ; y) associe le point $M''(x''\,;\,y'')$ défini par : $\begin{cases} x'' = 1 + y \\ y'' = 1 - x \end{cases}$.

     Montrez que $\boldsymbol{r}$ est une rotation dont on précisera le centre Ω et l'angle θ.
2. Lorsque le point M décrit la droite d'équation $y = x$, déterminez l'ensemble décrit par le point M''ainsi que l'ensemble décrit par le milieu du segment $[M\,M'']$.
3. Au point $M(x\,;\,y)$ on associe le point $M_2(x_2\,;\,y_2)$ défini par : $\begin{cases} x_2 = 1 + 3y \\ y_2 = 1 - 2x \end{cases}$.
   - **a)** Quelle est la nature de l'ensemble (E) des points M_2 lorsque M décrit le cercle unité de centre O ?
   - **b)** Caractériser l'image de (E) par la rotation r définie en **1. c).**

B. Soit la fonction numérique f à variable réelle x définie par : $f(x) = (2x - 1)\sqrt{\frac{x+1}{2}}$.

1. Étudiez les variations de f et tracez sa courbe (C_f) dans le plan muni du repère orthonormé$(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

   Précisez les tangentes à (C_f) aux points d'abscisses -1 et $-\frac{1}{2}$.

2. Soit (C'_f) la courbe image de (C_f) par la symétrie orthogonale par rapport $(O\ ;\ \vec{\imath})$. On pose : $\Gamma = (C_f) \cup (C'_f)$.

   Tracez Γ dans le même repère que (C_f).

3. On considère le point $A(-1;\ 0)$ et la droite Δ d'équation $x = -2$.

   Soit m un paramètre non nul, D la droite d'équation $y = mx$ et D' la droite orthogonale à D en $O(0\ ;\ 0)$. Les droites D et D' coupent Δ en P et P' respectivement. Soit K le milieu du segment $[P\ P']$, la droite (AK) coupe D et D'en M et M'respectivement.

   a) Déterminez les coordonnées de M et M' en fonction de m.

   b) On appelle l'ensemble des points M lorsque $m \in \mathbb{R}$ et Γ'_1 celui des points M' lorsque $m \in \mathbb{R}$.

   Trouvez une relation entre Γ_1 et Γ'_1.