Pays : Mali	**Année :** 2015	**Épreuve :** Mathématiques
Examen : BAC, série S.EXP	**Durée :** 3 h	**Coefficient :** 3

EXERCICE 1 (5 *points*)

Un paysan possède un champ où il plante des arbres fruitiers. Pour mieux les entretenir il décide de vendre chaque année les 5% des pieds existants et planter $3\,000$ nouveaux. Il démarre avec $50\,000$ pieds en 2015. On désigne par X_n le nombre de pieds d'arbres se trouvant dans le champ au cours de l'année $(2015 + n)$.

1. a) Déterminer le nombre d'arbres qu'il aura en 2016 et en 2017.

b) Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n.

2. On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = 60\,000 - X_n$.

a) Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le 1^{er} terme.

b) Exprimer U_n en fonction de *n*. En déduire X_n en fonction de *n*.

c) Ce paysan aura combien d'arbres fruitiers dans 20 ans ?

d) Calculer la limite de la suite (X_n). Conclure.

EXERCICE 2 (7 *points*)

Partie I

Soit *f* une fonction numérique à variable réelle *x* satisfaisant aux conditions suivantes :

- *f* est définie et dérivable sur IR.
- $f(1) = f(3) = 0$; $f(2) = -1$; $f(0) = 1$; $f'(0) = f'(2) = 0$.
- $\forall x \in]-\infty\,; 0[\cup]2\,; +\infty[$, $f'(x) > 0$; $\forall x \in]0\,; 2[$, $f'(x) < 0$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$; $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x + 2] = 0^-$

1. Dresser le tableau de variation de *f*.

2. $(\mathcal{C}_f)$ représentant les variations de *f*, préciser les équations des asymptotes à $(\mathcal{C}_f)$.

3. Préciser le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de *x*.

4. Tracer dans le même repère $(\mathcal{C}_f)$ et ses asymptotes.

5. Donner l'ensemble de définition des fonctions définies par : $ln\,(f(x))$ et $\dfrac{1}{f(x)}$ où *ln* désigne le logarithme népérien.

Partie II

Soient les nombres complexes $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\sqrt{3} + i$.

1. Écrire z_1, z_2 et $\dfrac{z_2}{z_1}$ sous forme trigonométrique.

2. Montrer qu'il existe deux suites géométrique (U) et (V) telles que $U_2 = V_2 = z_1$ et $U_4 = V_4 = z_2$ dont on déterminera les premiers termes U_0 et V_0 et la raison de chacune d'elles.

PROBLÈME (8 *points*)

Soit la fonction numérique f à variable réelle x définie par : $f(x) = x + \dfrac{2(1+\ln x)}{x}$.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition de f et les limites de f aux bornes de cet ensemble.

b) On considère la fonction h définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $h(x) = x^2 - 2\ln x$.

- Étudier les variations de h sur $]0 ; +\infty[$.
- En déduire le signe de $h(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

c) Étudier les variations de f. Dresser son tableau de variation.

d) Prouver que la droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}f)$ de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

2. a) Tracer la courbe $(\mathcal{C}f)$ et ses asymptotes dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

b) On désigne par $\mathcal{A}(k)$ l'aire exprimée en unité d'aire de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C}f)$, Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = k$. Calculer $\mathcal{A}(k)$.

c) Pour quelle valeur de k a-t-on $\mathcal{A}(k) = 8$?