Pays : Mali	**Année :** 2014	**Épreuve :** Mathématiques
Examen : BAC, série STI	**Durée :** 4 h	**Coefficient :** 4

EXERCICE 1 (6 *points*)

1. Soit l'équation (E) : $z^2 - 6z + 12 = 0$, où z est l'inconnue complexe.

a) Montrer que (E) admet deux solutions complexes conjuguées u et $\overline{u}$, u étant celle dont la partie imaginaire est positive.

b) Calculer le module et un argument de u.

En déduire le module et un argument de $\overline{u}$.

c) Écrire $u - 4$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

d) Calculer le module et un argument de $\dfrac{u}{u-4}$.

En déduire le module et un argument de $\dfrac{\overline{u}}{\overline{u}-4}$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé O ; I, J). On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -3$; $z_B = 2 + 2i$ et $z_C = 7i$.

a) Construire le triangle ABC.

b) Calculer les distances AB et BC.

c) Écrire le nombre complexe $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ sous forme trigonométrique.

d) Déduire des questions **a)** et **b)** la nature du triangle ABC.

EXERCICE 2 (4 *points*)

<u>Partie I</u>

Dans une classe de terminale, la taille moyenne des élèves est de 167 cm. La taille moyenne des filles est de 160 cm et la taille moyenne des garçons est de 173,5 cm. Quelle est l'effectif de la classe sachant qu'il est compris entre 50 et 60 ?

Partie II

Le vieux Balla a laissé son héritage dans un coffre dont la combinaison comporte les cinq chiffres x, y, z, t et h dans cet ordre, du système décimal. Il a mentionné sur son testament que sa fortune reviendrait à celui de ses héritiers qui trouverait la combinaison à partir des données suivantes :

- le 1er chiffre est pair ;
- la somme des deux premiers chiffres est 15 ;
- le troisième est la différence des deux premiers (le 1er moins le 2ème) ;
- le 1er chiffre est le produit du troisième par le quatrième ;
- le nombre est divisible par 9.

Quelle est la combinaison cherchée ?

***NB**: Les parties I/ et II/ sont indépendantes.*

PROBLÈME (10 *points*)

Partie A

Soit φ la fonction définie sur IR par : $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$.

1. a) Déterminer les limites de φ en $-\infty$ puis en $+\infty$.

Interpréter graphiquement le résultat de $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

b) Calculer $\varphi'(x)$ et étudier son signe.

Dresser le tableau de variation de φ.

2. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans IR, dont l'une notée α est dans $[1 ; +\infty[$. Vérifier que : $1{,}79 < \alpha < 1{,}80$.

3. En déduire le signe de φ sur IR.

Partie B

On donne les fonctions f et g définies par : $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$ et $g(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

Leurs courbes sont respectivement notées $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.

1. Déterminer les domaines de définition de f et de g puis calculer leurs limites aux bornes de ces domaines de définition.

2. Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ admettent au point A(0 ; 1) une tangente commune (T). Donner une équation cartésienne de (T).

3. a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) = \dfrac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$, où φ est la fonction définie dans la partie **A**.

b) Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

c) En déduire la position relative des courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.

4. a) Déterminer une primitive G de la fonction g sur IR.

b) Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie par

$F(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit une primitive de f sur IR.

c) Déduire une primitive H de $f - g$ sur IR.

d) Calculer l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ et les droites d'équations : $x = -\dfrac{1}{2}$ et $x = 0$.

***NB** : Les tracés de $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ ne sont pas demandés.*