Pays : Mali	**Année :** 2015	**Épreuve :** Mathématiques
Examen : BAC, série STI	**Durée :** 4 h	**Coefficient :** 4

EXERCICE 1 (5 points)

1. a) Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé, donner l'expression analytique de la symétrie orthogonale $\mathcal{S}$ d'axe la droite d'équation $y = -x + 1$.

b) On considère la parabole $(\mathcal{H})$ d'équation $y = x^2 - 1$.
Donner l'équation de l'image de $(\mathcal{H})$ par la symétrie $\mathcal{S}$.

c) Construire $(\mathcal{H})$ et son image dans le même repère.

2. Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan $\mathcal{P}$ et α un nombre réel. A tout point M de $\mathcal{P}$ on associe par l'application f_α le point M' tel que :
$\overrightarrow{MM'} = (2-\alpha)\overrightarrow{AM} - 4\overrightarrow{MB} + (1+2\alpha)\overrightarrow{MC}$.
Préciser, suivant les valeurs de α la nature et les éléments caractéristiques de l'application f_α.

EXERCICE 2 (5 points)

On considère le nombre complexe $z = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1. a) Calculer z^2 et z^4.

b) Calculer le module et un argument de z^4.
En déduire le module et un argument de z.

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$.
Soit $M(x\,;\,y)$ un point du plan d'affixe le complexe $a = x + iy$.
Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que le module de az soit égal à 8 où z est le complexe défini précédemment.

3. Trois villages désignés par les lettres A, B et C sont disposés en triangle comme suit : le village A est à $4\ km$ de B, à $3\ km$ de C et le village B est à $5\ km$ de C.
Ces trois villages décident de creuser un forage situé à égale distance des villages. Déterminer son emplacement en précisant la distance qui le sépare de chacun des villages.

PROBLÈME (10 *points*)

Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' = (x+2)e^x$

2. Déterminer la solution de (E) vérifiant : $y(0) = y'(0) = 1$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + x\,e^x$.

1. **a)** Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.

c) En déduire le signe de $f(x)$ en fonction de x.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1-x)(1+e^x)$.

On appelle (C) la représentation graphique de g dans un repère orthonormé.

Unité graphique : 1cm.

a) Déterminer les limites de g en $-\infty$et en $+\infty$.

b) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à (C) en $-\infty$. Étudiez la position relative de (C) par rapport à (Δ).

c) Calculer g' et montrer que : $g' = -f$

d) Dresser le tableau de variation de g.

3. On pose : $\varphi(x) = g(x) - x$.

a) Calculer φ' puis dressez le tableau de variation de φ.

b) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0{,}7\,;0{,}8[$.

c) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

d) Vérifier que : $g(\alpha) = \alpha$.

4. Tracer (C) et son asymptote (Δ) dans le même repère.

5. β étant un nombre réel inférieur à 1.

a) Calculer en fonction de β, l'aire $A(\beta)$ de la partie du plan comprise entre (C), (Δ) et les droites d'équations $x = \beta$.

b) Calculer $\lim\limits_{\beta \to -\infty} A(\beta)$.