grandprof contacts: Whatsapp/Telegram/call 00237679775139

| | | |
|---|---|---|
| **Pays :** Burkina Faso | **Année :** 2016 | **Épreuve :** Mathématiques, 2nd Tour |
| **Examen :** BAC, séries C-E | **Durée :** 3 h | **Coefficient :** 06 |

## EXERCICE 1 (4 *points*)

Une urne contient $N$ boules indiscernables au toucher dont une porte le n° l, deux portent le n° 2 , ..., $n$ portent le numéro $n$. ($n$ est un entier naturel impair strictement supérieur à 1).

**1.** On tire une boule de l'urne.

Soit E l'événement « la boule tirée est un nombre pair » et F l'événement « la boule tirée est un nombre impair ».

**a)** Montrer que : $N = \frac{n(n+1)}{2}$.

**b)** En posant $n = 2k + 1$ ($k$ étant un entier naturel non nul), montrer que :

$Card\ E = \frac{(n-1)(n+1)}{4}$ et $Card\ F = \frac{(n+1)^2}{4}$.

**c)** En déduire les probabilités des événements E et F.

**2.** On tire simultanément deux boules de l'urne.

Calculer la probabilité pour que la somme des numéros portés par les deux boules soit un nombre impair.

**3.** Dans cette question, on prend $n = 19$.

On tire une boule de l'urne. On désigne par A l'événement « le numéro de la boule tirée est un multiple de 5 ou un multiple de 7 » et par B l'événement « le numéro de la boule tirée est impair ».

**a)** Calculer $p(A)$ et $p(B)$.

**b)** Les événements A et B sont-ils indépendants ?

## EXERCICE 2 (4 *points*)

Dans le plan ($P$), soient A, B et C les sommets d'un triangle équilatéral dont la longueur d'un côté est $2d$ ($d > 0$).

**1. a)** Déterminer l'ensemble E des nombres réels $\beta$ tels que les points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, $\beta$ et 1 admettent un barycentre $G_\beta$.

**b)** Quel est l'ensemble des points $G_\beta$ lorsque $\beta$ parcourt E ?

**2.** On prend $\beta = 1$.

**a)** Déterminer $G_1$.

**b)** On pose : $f_1(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$.

Déterminer l'ensemble $(C)$ des points M tels que : $f_1(M) = 8d^2$.

**3.** On prend $\beta = -2$.

**a)** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{2MB} + \overrightarrow{MC}$ est un vecteur $\vec{V}$ indépendant de $M$.

Déterminer $\vec{V}$.

**b)** Déterminer l'ensemble ( Γ ) des points M tels que : $MA^2 - 2MB^2 + MC^2 = 0$.



www.grandprof.net

grandprof contacts: Whatsapp/Telegram/call 00237679775139

**PROBLÈME (12 *points*)**

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$). Unité graphique : 3 cm.
Soit $f$ la fonction définie sur [0, +∞[ par $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$ et ($C$) sa courbe dans le plan.

**Partie A** **(4,5 *points*)**

**1.** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

**2.** Démontrer que pour tout $x$ élément de l'intervalle ]0 ; +∞[, $f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$.
En déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote à ($C$).

**3.** Étudier la position relative de ($C$) et (Δ).

**4.** Étudier le sens de variation de $f$, puis dresser son tableau de variation.

**5.** Tracer la droite (Δ) et la courbe ($C$).

**Partie B** **(4,5 *points*)**

Pour tout $x$ élément de l'intervalle [0 ; +∞[, on pose : $F(x) = \int_0^x \ln(1 + e^{-2t})dt$

Soit $\alpha$ un nombre réel strictement positif.

**1.** Donner une interprétation géométrique de $F(\alpha)$.

**2.** Étudier le sens de variation de $F$.

**3.** Démontrer que pour tout $t$ élément de l'intervalle [1 ; 1 + α], on a : $\frac{1}{1+\alpha} \leq \frac{1}{t} \leq 1$.

**4.** Établir que : $\frac{\alpha}{1+\alpha} \leq \ln(1 + \alpha) \leq \alpha$.

**5.** Déduire de la question **4.** que pour tout $x$ élément de l'intervalle [0 ; +∞[, on a :

**a)** $\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t}\, dt$.

**b)** $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1 + e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$.

**c)** On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ existe et est un nombre réel $l$.

Établir que : $\frac{1}{2}\ln 2 \leq l \leq \frac{1}{2}$.

**Partie C** **(3 *points*)**

Pour tout entier naturel $n$, on pose : $U_n = \int_n^{n+1} \ln(1 + e^{-2t})\, dt$.

**1.** **a)** Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $0 \leq U_n \leq \ln(1 + e^{-2n})$.

**b)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ .

**2.** Pour tout entier naturel $n$, on pose : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} U_k$.

**a)** Exprimer $S_n$ à l'aide de $F(n)$.

**b)** La suite ($S_n$) est-elle convergente ? Dans l'affirmative, calculer sa limite.

*On donne* : ln2 = 0, 7.



www.grandprof.net