Pays : Cameroun	**Année** : 2017	**Épreuve** : Mathématiques
Examen : BAC, Séries C - E	**Durée** : 4 h	**Coefficient** : 5 - 4

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1 : SÉRIE C UNIQUEMENT (05 *points*)

1. *a*) Vérifier que le couple (5 ; -7) est une solution de l'équation (E) : $13x + 7y = 16$.
b) Déterminer les couples d'entiers relatifs (x ; y) vérifiant l'équation (E).

2. *a*) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $4^{2n} \equiv 1[5]$.
b) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2014^{2015} par 5.

3. p désigne un entier naturel supérieur à 1. Une urne contient $2p$ boules numérotées de 1 à $2p$, toutes indiscernables au toucher. Un joueur tire successivement, sans remise 2 boules de cette urne.
a) Quel est le nombre de résultats possibles ?
Si les boules tirées portent des numéros pairs, il gagne 800 F CFA. Si les boules tirées sont de parités différentes, il gagne 400 F CFA et il perd 800 F CFA si elles portent des numéros impairs. On désigne par X le gain algébrique du joueur à l'issue de chaque épreuve.
b) Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de p.
c) Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de p.
d) Calculer p pour que l'espérance de gain du joueur soit de 240 F CFA.

EXERCICE 2 : SÉRIE E UNIQUEMENT (05 *points*)

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont une base est $B = (\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$.
Soit f l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ associe le vecteur
$f(\vec{u}) = (-x - y + 2z)\vec{i} + (2x - y + z)\vec{j} + (x - 2y + 3z)\vec{k}$.

1. Déterminer la matrice de f dans la base B.

2. *a*) Déterminer le noyau $Ker\, f$ de f (On donnera une base de $Ker\, f$).
b) En déduire la dimension de $Im\, f$, image de f.
c) f est-elle bijective ? Justifier la réponse.

3. On considère les vecteurs $\vec{e_1} = 2\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{e_2} = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{e_3} = \vec{i} - \vec{k}$.
a) Démontrer que la famille $B' = (\vec{e_1}\,;\,\vec{e_2}\,;\,\vec{e_3})$ est une base de l'espace vectoriel E.
b) Déterminer la matrice de f dans la base B'.

EXERCICE 3 (05 *points*)

Soit ABCD un carré de sens direct et de centre I.

Partie A

Soient $\boldsymbol{r}$ la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, $\boldsymbol{t}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ et S la symétrie centrale de centre C, c'est-à-dire $\boldsymbol{r} = R(A, \frac{\pi}{2})$, $\boldsymbol{t} = t_{\overrightarrow{AC}}$ et $S = S_C$.

1. *a*) Déterminer la droite (Δ) telle que $\boldsymbol{r} = S_\Delta \circ S_{(AD)}$.
b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $t \circ r$.

2. *a*) Déterminer $(S \circ t \circ r)$(A) et $(S \circ t \circ r)$(D).
b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $S \circ t \circ r$.

Partie B

Soient M un point de la droite (DC), N le point d'intersection de la droite (BC) avec la perpendiculaire à la droite (AM) passant par A, J le milieu du segment [MN]. r' est la rotation de centre A telle que B = $r'(D)$; S' est la similitude directe de centre A telle que I = $S'(D)$.

1. Montrer que N = $r'(M)$. En déduire la nature du triangle AMN.

2. *a*) Déterminer l'image de C par S'.
b) Démontrer que J = $S'(M)$.
c) Déduire le lieu géométrique des points J, lorsque M décrit la droite (DC).

PROBLÈME (10 *points*)

Partie A

On se place dans l'espace ($\mathcal{E}$) muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$). On considère les points A(1 ; 6 ; 4), B(2 ; 5 ; 3), C(8 ; 1 ; 7). On pose $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

1. *a*) Déterminer les coordonnées de $\vec{N}$. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
b) Déterminer l'aire du triangle ABC.

2. Soit (Δ) la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2\,;\ -1\,;3)$.
a) Démontrer que la droite (Δ) est orthogonale au plan (ABC).
b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ).
d) Déterminer les coordonnées de K, point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).

3. On note H le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
a) On pose $\overrightarrow{DH} = \alpha\vec{N}$. Calculer α.
b) En déduire la distance DH et le volume du tétraèdre ABCD.

4. Soit (P_1) le plan d'équation $x + y + z - 6 = 0$ et (P_2) le plan d'équation $x + 4y - 7 = 0$.
a) Démontrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.
b) Vérifier que la droite (*d*), intersection des plans (P_1) et (P_2), a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -4t - 1 \\ y = t + 2, \; t\epsilon\mathbb{R}. \\ z = 3t + 5 \end{cases}$$

c) La droite (*d*) et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

5. Démontrer que la courbe (S) d'équation $x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 4 = 0$ est une sphère $(\mathcal{E})$ dont on précisera les éléments caractéristiques.

Partie B

Soit (P) le plan de l'espace $(\mathcal{E})$ d'équation $z = 0$, rapporté au repère orthonormé (O ; $\vec{u}, \vec{v}$). Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2lnx - \frac{3}{x} + 3$. (C_f) est la courbe représentative de f dans le repère (O ; $\vec{u}, \vec{v}$).

1. *a*) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
b) Étudier les variations de f et en déduire son signe.
c) Tracer la courbe (C_f) de f dans le repère orthonormé (O ; $\vec{u}, \vec{v}$) du plan.

2. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
a) Calculer u_1, u_2 et u_3 (On donnera l'arrondi d'ordre 2).
b) Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
c) Démontrer que pour tout entier naturel n : $2 \leq u_n \leq 6{,}5$.
d) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. Soient les équations différentielles (E) : $y'' + y' = 0$ et (E') : $y'' + y' = \frac{(2x-3)(x+2)}{x^3}$.
a) Montrer que f est solution sur $]0\,;+\infty[$ de (E').
b) Résoudre (E) sur $]0\,;+\infty[$.
c) Montrer qu'une fonction g est solution de (E') si et seulement si $g - f$ est solution de (E).
d) Résoudre alors (E') sur $]0\,;+\infty[$.