

Pays : Togo

Année : 2017

Épreuve : Mathématiques

Examen : BAC, Séries C-E

Durée : 4 h

Coefficient : 5

EXERCICE 1 (4 points)

Le plan P est muni du repère orthonormé (O, I, J) , α étant un nombre réel. Soit f_α l'application de P dans P transformant I en $A\begin{pmatrix} \alpha+1 \\ \alpha+2 \end{pmatrix}$, J en $B\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et laissant invariant O .

1. a) Montrer que f_α est une application affine.

b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f_α est bijective.

On note ℓ_α son application linéaire associée et on pose : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

c) Déterminer $\ell_\alpha(\vec{i})$ et $\ell_\alpha(\vec{j})$. En déduire l'expression analytique de f_α dans le repère (O, I, J) .

2. Déterminer α pour que l'on ait $f_\alpha \circ f_\alpha = \text{Id}_P$ où Id_P est l'application identique du plan.

3. Déterminer l'ensemble des points invariants par f_α . (On discutera suivant les valeurs de α).

4. Quelle est la nature géométrique de f_1 ? ($\alpha = 1$). Quels sont ses éléments caractéristiques ?

5. Étude de f_0 ($\alpha = 0$)

a) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M' qui sont images par f_0 d'au moins un point M de P .

b) Soit s la symétrie de centre O . Montrer que $f_0 = p \circ s$ où p est une projection dont on précisera les éléments caractéristiques.

EXERCICE 2 (4 points)

Un sac contient 30 boules indiscernables au toucher dont α noires, β blanches et γ rouges. On suppose qu'il y a au moins deux boules de chaque couleur. On tire au hasard et simultanément deux boules du sac. Soit l'événement E « Obtenir deux boules de même couleur ».

1. Calculer en fonction de α , β et γ la probabilité $P(\alpha, \beta, \gamma)$ de l'événement E .

2. On se propose de déterminer α , β et γ afin que $P(\alpha, \beta, \gamma)$ soit minimale. Pour cela on munit

l'espace affine \mathcal{E} d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on considère les points $A(30; 0; 0)$;

$B(0; 30; 0)$ et $C(0; 0; 30)$. Soit le point $M(\alpha, \beta, \gamma)$ de \mathcal{E} .

a) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x + y + z - 30 = 0$.

b) En déduire que M appartient au plan (ABC) .

c) Démontrer que $870 P(\alpha, \beta, \gamma) + 30 = OM^2$.

d) Soit H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC) .

Déterminer les coordonnées du point H .

e) En déduire les valeurs de α , β et γ qui rendent minimale $P(\alpha, \beta, \gamma)$, puis calculer la probabilité $P(\alpha, \beta, \gamma)$ correspondante.

3. Le sac contient désormais 10 boules noires, 10 boules blanches et 10 boules rouges. Soit n et k deux entiers naturels supérieur ou égal à 2.

Un joueur mise n francs et tire simultanément deux boules du sac.

- S'il obtient deux boules de même couleur, il reçoit k fois sa mise et le jeu est terminé.

- S'il obtient deux boules de couleurs différentes, il remet les deux boules tirées dans le sac et tire à nouveau simultanément deux boules.

- S'il obtient deux boules de même couleur, il reçoit $(k-1)$ fois sa mise, sinon il perd sa mise et le jeu est terminé.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a) Montrer que la probabilité pour que le joueur ait un gain algébrique égal à $kn - n$ est $\frac{9}{29}$.

b) Déterminer la loi de probabilité de X .

c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ en fonction de k et n .

PROBLÈME (12 points)

Partie A

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f .
2. Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
3. Construire la courbe (\mathcal{C}) de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie B

On considère l'application T_k du plan dans lui-même d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = kx - y + 1 \\ y' = -x - ky + 1 \end{cases} \text{ où } k \text{ est un réel.}$$

1. T_k est-elle une transformation du plan ?
2. En discutant suivant les valeurs de k , déterminer l'ensemble des points invariants par T_k .
3. Déterminer l'écriture complexe associée à T_k .
4. Caractériser $T_k \circ T_k$ suivant les valeurs de k .
5. a) Caractériser T_0 puis déterminer l'équation de la courbe (Γ) image de (\mathcal{C}) par T_0 .
b) Tracer (Γ) dans le même repère que (\mathcal{C}) .

Partie C

Pour tout réel $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ on pose : $g(x) = f(\cos x)$.

1. Montrer que g est une primitive sur $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ de $x \mapsto \frac{C}{\sin x}$ où C est un réel à déterminer.
2. $\forall a \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n(a) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^a \frac{-\cos^{2n} t}{\sin t} dt$.

Montrer que : $0 \leq I_n(a) \leq \frac{\cos^{2n} a}{-\sin a} \left(a + \frac{\pi}{2}\right)$.

En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(a) = 0$.

3. Pour tout entier naturel non nul n , on définit la fonction F_n sur $\left[-\frac{\pi}{2}, a\right]$ par :

$$F_n(t) = \cos t + \frac{\cos^3 t}{3} + \frac{\cos^5 t}{5} + \dots + \frac{\cos^{2n-1} t}{2n-1}.$$

a) Montrer que F_n est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, a\right]$ et que $\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, a\right]$, $F'_n(t) = \frac{-1 + \cos^{2n} t}{\sin t}$.

Calculer $F_n\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

b) En intégrant la relation précédente entre $-\frac{\pi}{2}$ et a , montrer que $F_n(a) = \frac{-g(a)}{c} - I_n(a)$, où c est le réel déterminé dans la question C. 1. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(a)$.

Partie D

Dans cette partie $x \in]0; 1[$; $t \in]0, x[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Vérifier que : $\sum_{k=0}^{2n-1} x^k = \frac{1-x^{2n}}{1-x}$ (1)

et que $\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k x^k = \frac{1+(-1)^{2n-1}x^{2n}}{1+x}$. (2)

2. a) Démontrer que : $1 < \frac{1}{1-t^2} < \frac{1}{1-x^2}$.

En déduire que : $0 < \frac{x^{2n+1}}{2n+1} < \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2} dt < \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}$.

b) Utiliser les relations (1) et (2) pour montrer que : $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n} + \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t} dt$

et $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{2n-1} \frac{x^{2n}}{2n} + (-1)^{2n} \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t} dt$.

c) En déduire que $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2} dt$.

3. Des questions **D.1** et **2**, trouver deux fonctions U et V sans intégrale telles que :

$U(x) < f(x) < V(x)$.