MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	BACCALAUREAT 2019	Durée : 4 H
	MATHEMATIQUES	Coef. : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE CE	

Exercice 1

Soit (C) l'ensemble des fonctions numériques continues sur IR_+^*. Pour tout f de (C), on définit la fonction F sur IR_+^* par $F(x) = \int_{3x}^{x} \frac{f(t)}{t} dt$.

1- Montrer que F est dérivable sur IR_+^* puis calculer sa fonction dérivée F'.

2-a/ Montrer que si f est une fonction constante alors F est aussi une fonction constante puis définir F dans ce cas.

b/ Définir la fonction F pour $f : t \longmapsto \frac{1}{t}$.

Dans la suite de l'exercice f est la fonction : $t \rightarrow cost$.

3-a/ Déterminer les signes de $F(\frac{\pi}{6})$ et $F(\frac{\pi}{2})$.

b/ Montrer que pour tout t de IR_+^*, $\frac{f(t)}{t} \leq \frac{1}{t}$ et que F est une fonction bornée.

c/ Démontrer que pour tout x de IR_+^*, $sinx \leq x$.

d/ Démontrer que pour tout x de IR_+, $F(x) + ln3 = -2\int_{3x}^{x} \frac{sin^2\frac{t}{2}}{t} dt$

et que $0 \leq F(x) + 3 \leq 2x^2$.

En déduire la limite de F à droite en 0.

4- a/ Etablir, en utilisant la méthode d'intégration par parties que

$\forall\, x \in \mathrm{IR}_+^*$, $\left|F(x) - \frac{3sinx - sin3x}{3x}\right| \leq \frac{2}{3x}$ et en déduire la limite de F en $+\infty$.

b/ Montrer que $\forall\, x \in \mathrm{IR}_+^*$, $F'(x) = \frac{4cosxsin^2x}{x}$.

5- Soit F_1 la restriction de F à $]0; 2\pi]$.

a/ Dresser le tableau de variation de F_1.

b/ Montrer que l'équation $x \in \left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[$, $F_1(x) = 0$ admet une unique solution.

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

Soit A_0 le point d'affixe 2 et A'_0 le point d'affixe $1 - i\sqrt{3}$ et A_1 le milieu du segment $[A_0A'_0]$.

Plus généralement si A_n est un point d'affixe z_n on désigne par A'_n le point d'affixe $(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})z_n$ et par A_{n+1}, le milieu du segment $[A_nA'_n]$. On note r_n et θ_n, le module et l'argument de z_n.

1- Déterminer les affixes des points A_1; A'_1 ; A_2 en A'_2.

2-a/ Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction z_n.

En déduire l'expression de z_n en fonction de n.

Montrer que A_{n+1} est l'image de A_n par une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

b/ Etablir les expressions de r_n et θ_n en fonction de n.

c/ Déterminer la limite de r_n lorsque n tend vers $+\infty$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

d/ Comparer les modules et les arguments de z_n et z_{n+6}.

3- a/ Etablir que $A_nA_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} A_{n-1} A_n$.

b/ Déterminer en fonction de n, la longueur dn de la ligne brisée $A_0A_1 \ldots\ldots\ldots A_{n-1} A_n$.

c/ Calculer la limite de dn lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème

Dans ce problème, on se propose d'étudier l'ensemble (Γ) des points de l'espace équidistants de deux droites (D) et D') non coplanaires et orthogonales.

A.

1-a/ Donner une condition nécessaire et suffisante qu'une symétrie orthogonale par rapport à un plan ε laisse invariante une droite donnée.

b/ Démontrer qu'il existe deux symétries orthogonales par rapport à un plan et deux seulement qui laissent simultanément invariantes les droites (D) et (D').

On note (P) le plan contenant la droite (D) et orthogonale à (D') en B. (P') le plan contenant la droite (D') et orthogonale à (D) en A.

2-a/ Déterminer l'intersection des plans (P) et (P').

b/ Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs directeurs de (D) et (D') respectivement.

Que peut-on dire de la droite (AB) et du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$?

3- Montrer que (Γ) admet les plans (P) et (P') comme plans de symétrie et la droite AB comme axe de symétrie.

4- Montrer que l'intersection de (Γ) avec l'un quelconque des plans (P) et (P') est une parabole dont on précisera le foyer et la directrice.

Dans la suite, l'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

B.

La droite (D) passe par le point A de coordonnées (0, 0, 1) et admet comme vecteur directeur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$. La droite (D') passant par B de coordonnées (0, 0, -1) et admet comme vecteur directeur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

1-a/ Vérifier que (D) et (D') sont orthogonales et non coplanaires.

Montrer que le point O appartient à (Γ).

b/ Montrer qu'une représentation paramétrique de (D) est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \quad , \quad t \in IR \\ y = 1 \end{cases}$$

Soit M un point de coordonnées (x, y, z) et Q un point de (D).

Exprimer MQ^2 . Soit la fonction : $t \longmapsto MQ^2$, en déduire la distance de M à (D).

c/ Calculer de même la distance du point M à la droite (D').

d/ En déduire que M appartient à (Γ) si et seulement si on a : $xy + 2z = 0$.

2- Déduire de cette relation :

a/ Que les intersections de (Γ) avec le plan orthogonal à la droite (AB) sont en général des hyperboles. Précise le cas d'exception.

b/ La nature des intersections de (Γ) avec les plan orthogonaux à l'axe (O, $\vec{i}$) ou à l'axe (O, $\vec{j}$).

C.

Soit $M(t)$ le point de (Γ) d'abscisses $x(t)$ et d'ordonnées $y(t)$ dans le repère (O, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) avec $x(t) = 4\cos t$ et $y(t) = sin2t$.
Lorsque t varie sur IR, le point M décrit une courbe (C) incluse dans (Γ).
1-a/ Montrer que la courbe (C_z) projeté orthogonal de (C) sur le plan d'équation $z = 0$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = 4cost \\ y(t) = sin2t \end{cases} \quad (t \in \mathrm{IR}) \text{ dans le repère } (O, \vec{i}, \vec{j}).$$

b/ Etudier les positions des points $M(t)$ et $M(\pi - t)$.
c/ Construire (C_z). On prendra 2 cm comme unité.
2- On désigne par (C_x) le projeté orthogonal de (C) sur le plan d'équation $x = 0$ et par (C_y) le projeté orthogonal de (C) sur le plan d'équation $y = 0$
Construire ces courbes après avoir donné une représentation paramétrique de chacune d'elles.
Une étude préalable de leurs éventuels éléments de symétrie facilitera leur étude et leur construction.