Pays : Cameroun	**Année :** 2014	**Session :** normale
Série : BAC, séries D et TI	**Durée :** 4 h	**Coefficient :** 4

Exercice 1

A) On considère le polynôme p défini par $p(z)=z^3-3z^2-3z+5+20i$, z étant un nombre complexe.

1. Montrer que $1+2i$ est une racine de p.

2. Trouver deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on ait $p(z)=(z-1-2i)(z^2+az+b)$.

3. En déduire dans l'ensemble des nombres complexes, les solutions de l'équation $p(z)=0$.

B) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$; on prendra 1cm pour unité graphique.

1. Placer les points A, B et C d'affixes respectives $a=1+2i$, $b=-2-i$ et $c=4-i$ dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

2. Soit D le point d'affixe $2+3i$. Montrer que A, B et D sont alignés.

a) Calculer $\dfrac{b-a}{c-a}$, mettre le résultat sous la forme algébrique puis sous la forme trigonométrique.

b) En déduire la nature exacte du triangle ABC.

Exercice 2

Une entreprise achète, utilise et revend des machines après un certain nombre x_i d'années. Après 6 années, l'évolution du prix de vente d'une machine en fonction du nombre d'années d'utilisation, se présente comme suit :

Nombre d'année x_i	1	2	3	4	5	6
Prix y_i en milliers de	150	125	90	75	50	45

1. Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique.
(*On prendra 1 cm pour une année en abscisse et 1 cm pour 20 000 FCFA en ordonnée.*)

2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de la série (x_i, y_i) ainsi définie.

3. En utilisant la méthode des moindres carrés, déterminer une équation cartésienne de la droite de régression de y en x de cette série statistique.

4. En déduire une estimation du prix de vente d'une machine après 7 ans d'utilisation.

Problème

Le problème comporte trois parties A, B et C obligatoires.

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie pour tout $x \neq -2$ par

$$f(x)=\frac{e^x}{x+2}.$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3. Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]-1\,;\,+\infty[$.

Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.

4. Tracer, dans le même repère, la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f, et la courbe $(\mathscr{C}')$ représentative de la fonction g^{-1}.

Partie B

1. Déterminer l'image par f de l'intervalle $[0\,;1]$.

2. Calculer $f''(x)$ et vérifier que pour tout x de $[0\,;1]$, $f''(x) > 0$.

3. En déduire que pour tout x de $[0\,;1]$, $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$.

4. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution ~ dans l'intervalle $[0\,;1]$

(*On ne demande pas de calculer* ~.)

Partie C

On considère la suite (u_n) à termes positifs, définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel non nul n,

$u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer par récurrence sur n que la suite (u_n) est croissante et que $u_n \in \left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]$.

Quelle conclusion peut-on en tirer ?

2. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - \sim| \leq \frac{2}{3}|u_n - \sim|$.

3. En déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n - \sim| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).