UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

01 G 18 Bis B18
Durée : 2 heures
Série S1-S3 Coef 8

Epreuve du 2ème groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n⁰ 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Exercice 1 (5 *points*). Un parcours sportif comporte trois épreuves :

i) Une première épreuve de saut d'une haie, réussie si la haie ne tombe pas.
ii) Une deuxième épreuve de saut d'un ruisseau, réussie si les pieds ne sont pas mouillés.
iii) Une troisième épreuve de grimper d'une corde, réussie si on va jusqu'au bout.

Chacune des épreuves est indépendante de l'autre.

Un sportif donné, abonné à ce parcours réussit le saut d'une haie avec la probabilité $0,7$ et les deux autres épreuves avec la même probabilité $0,4$.

Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « Le sportif échoue à la deuxième épreuve. »
B : « Le sportif passe avec succès les deux premières épreuves et échoue à la troisième. »
C : « Le sportif fait un parcours ne comportant qu'un seul échec. »
D : « Le sportif réussit au moins deux épreuves. » $1 + 1 + 1.5 + 1.5$ *pts*

Exercice 2 (5 *points*).

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A, B les points d'affixes respectives $a = 1 - i, b = -i$ et f l'application de $\mathcal{P} \setminus \{A\}$ dans $\mathcal{P}$ associant à tout point $M(z)$ le point $M'(z')$ tel que

$$z'z = az' + bz.$$

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$, $z' = \dfrac{bz}{z-a}$. 0.5 *pt*

2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f. 0.5 *pt*

3. a. Etablir que pour tout point M distinct de O et de A,

$$OM' = \frac{OM}{AM} \text{ et } \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = -\frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{OM}\right) [2\pi]$$ 2×0.5 *pt*

b. Déterminer et construire l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points $M(z)$ tels que $|z'| = 2$. 2×0.5 *pt*

c. Montrer que l'image par f de la médiatrice de $[OA]$ est le cercle de centre O et de rayon 1. 0.5 *pt*

d. Déterminer l'ensemble des points $M''(1 + z')$ lorsque M décrit la médiatrice de $[OA]$. (On pourra utiliser la translation de vecteur d'affixe 1). 0.5 *pt*

4. a. Montrer que : $(z' - b)(z - a) = ab$. 0.5 *pt*

b. On note Δ' la droite (AB) privée de B. Déterminer l'ensemble Δ des points $M(z)$ lorsque M' appartient à Δ'. 0.5 *pt*

Exercice 3 (5 *points*). Soit f la fonction définie sur $]0, \pi[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$.

1. Etudier la fonction f et construire sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. **1, 5 pt**

2. Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ possède une fonction réciproque g^{-1}. Tracer la courbe de g^{-1} dans le même repère que $\mathcal{C}$. 1*pt*

3. a. Soit $y = g^{-1}(x)$. Montrer que $\sin y = \dfrac{1}{x}$ et $\cos y = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$. 1*pt*

b. En déduire que pour tout x de $]1, +\infty[$, $(g^{-1})'(x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. 0, 5*pt*

4. En se servant des résultats précédents, calculer $\displaystyle\int_{2\sqrt{3}/3}^{\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$. 1*pt*

Exercice 4 (5 *points*).

1. Soit N un entier relatif impair.
Montrer que $N^2 \equiv 1[8]$ 1*pt*

2. Montrer que si un entier relatif M est tel que $M^2 \equiv 1[8]$, alors M est impair. 1*pt*

3. Soit k un entier relatif fixé. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 = 8k + 1$. 1.5*pt*

4. Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $(\mathcal{C})$ la courbe d'équation

$$y = \frac{1}{8}(x^2 - 1).$$

Déterminer les points de $(\mathcal{C})$ à coordonnées entières se trouvant à l'intérieur du quadrilatère $OABC$ avec $A(5, 0), B(5, 5), C(0, 5)$. 1.5*pt*