

Epreuve de Math Section Math Session de contrôle 2009

Exercice n°1*De quoi s'agit-il ?**Nombres complexes-suites –fonction logarithme népérien-limites***CORRIGÉ**

- 1) Réponse - c - 2) Réponse - a - 3) Réponse - c - 4) Réponse - c -

Exercice n°2*De quoi s'agit-il ?**Fonction exponentielle - suites – calcul intégral.***CORRIGÉ**

1) a- En posant $t = -x$ on aura $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\frac{-t}{+\infty} - \frac{te^t}{0} - \frac{e^t}{0} \right) = +\infty$.

b- En posant $t = -x$ on aura $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(-\frac{te^t}{0} - \frac{e^t}{0} \right) = 0$

Donc la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (\mathcal{C}) au voisinage de $+\infty$.

c- Soit $x \in [0, +\infty[$; $f(x) - x = (x-1)e^{-x}$

sur $[0, 1]$ la courbe (\mathcal{C}) est située au dessous de Δ .

sur $[1, +\infty[$ la courbe (\mathcal{C}) est située au dessus de Δ .

2) a- f est définie et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[)$

de plus f est continue sur $[0, +\infty[$ donc $f([0, +\infty[) = [-1, +\infty[$.

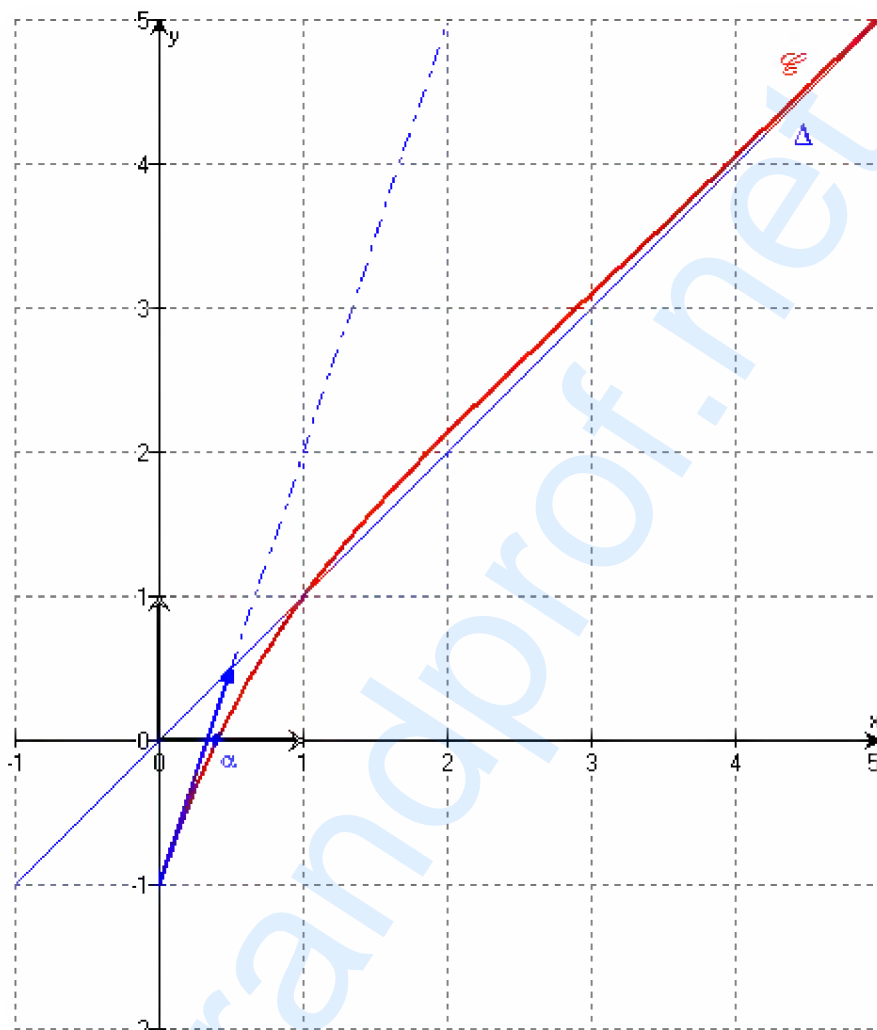
Comme $0 \in [-1, +\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[0, +\infty[$ une solution unique α .

Puisque $f(0) = -1 < 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) > 0$ donc $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Conclusion : L'équation $f(x) = 0$ admet dans $[0, +\infty[$ une solution unique $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

b- D'après le tableau de variation de la fonction f on a : $f'(0) = 3$

donc la demi tangente à (\mathcal{C}) au point d'abscisse 0 est de coefficient directeur 3.



$$3) \text{ a- } u_1 = \int_{\alpha}^1 f(x) dx = \int_{\alpha}^1 (x + (x-1)e^{-x}) dx = \int_{\alpha}^1 x dx + \int_{\alpha}^1 (x-1)e^{-x} dx$$

$$\text{Or } \int_{\alpha}^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\alpha}^1 = \frac{1}{2}(1 - \alpha^2)$$

$$\int_{\alpha}^1 (x-1)e^{-x} dx \quad \text{on intègre par parties on pose : } \begin{cases} u(x) = x-1 & \rightarrow & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-x} & \rightarrow & v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\text{Par suite } \int_{\alpha}^1 (x-1)e^{-x} dx = \left[-(x-1)e^{-x} \right]_{\alpha}^1 + \int_{\alpha}^1 e^{-x} dx = \left[-xe^{-x} \right]_{\alpha}^1 = -\frac{1}{e} + \alpha e^{-\alpha}$$

$$\text{donc } u_1 = \int_{\alpha}^1 f(x) dx = \frac{1}{2}(1 - \alpha^2) - \frac{1}{e} + \alpha e^{-\alpha}.$$

Interprétation : $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [\alpha, 1]$ donc u_1 représente l'aire, en unité d'aire, du domaine du plan limité par la courbe (\mathcal{C}) et les droites d'équations : $y = 0$, $x = 1$ et $x = \alpha$

b- sur $[0,1]$ la courbe (\mathcal{C}) est situé au dessous de Δ donc pour tout réel $x \in [0,1]$, $f(x) \leq x$

de plus pour tout $x \in [\alpha, +\infty[$, $f(x) \geq 0$ et $\alpha < 1$ ainsi pour tout $x \in [\alpha, 1]$ on a : $0 \leq f(x) \leq x$

par suite $0 \leq \int_{\alpha}^1 [f(x)]^n dx \leq \int_{\alpha}^1 x^n dx$

$$\text{d'où } 0 \leq u_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{\alpha}^1 \quad \text{or} \quad \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{\alpha}^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{donc} \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

c- Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice n°3

De quoi s'agit-il ?

Suites adjacentes

CORRIGÉ

1) Montrons, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

□ vérification : pour $n = 1$ l'inégalité $u_1 \leq v_1$ est vraie (car $u_1 = \frac{1}{3}$ et $v_1 = \frac{2}{5}$)

□ soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $u_n \leq v_n$ et montrons que $u_{n+1} \leq v_{n+1}$

$$\text{Comme } u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} - \frac{3u_n + 2v_n}{5} = \frac{u_n - v_n}{15} \leq 0 \quad \text{car } u_n - v_n \leq 0 \quad \text{donc } u_{n+1} \leq v_{n+1}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq v_n$.

2) □ $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + v_n}{3} - u_n = -\frac{u_n - v_n}{3} \geq 0$ car $u_n - v_n \leq 0$ donc (u_n) est une suite croissante.

□ $v_{n+1} - v_n = \frac{3u_n + 2v_n}{5} - v_n = \frac{3(u_n - v_n)}{5} \leq 0$ car $u_n - v_n \leq 0$ donc (v_n) est une suite décroissante.

3) Première méthode

□ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ et (v_n) est une suite décroissante donc (v_n) est majoré par $v_0 = 1$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$.

Ainsi (u_n) est une suite croissante et majoré par 1 donc converge.

□ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq u_n$ et (u_n) est une suite croissante donc (u_n) est minoré par $u_0 = 0$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 0$.

Ainsi (v_n) est une suite décroissante et minoré par 0 donc converge.

□ On pose $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = l'$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = l \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1}) = l$$

Comme $u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}$ donc les opérations sur les limites des suites donnent $l = \frac{2l + l'}{3}$

D'où $l = l'$

Deuxième méthode

D'après ce qui précède on a : $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{15}(u_n - v_n)$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n = -\left(\frac{1}{15}\right)^n$

vérification : l'égalité $u_0 - v_0 = -\left(\frac{1}{15}\right)^0$ est vraie (car $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et $-\left(\frac{1}{15}\right)^0 = -1$)

supposons que $u_n - v_n = -\left(\frac{1}{15}\right)^n$

montrons que $u_{n+1} - v_{n+1} = -\left(\frac{1}{15}\right)^{n+1}$

on a : $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{15} \left[-\left(\frac{1}{15}\right)^n \right] = -\left(\frac{1}{15}\right)^{n+1}$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n = -\left(\frac{1}{15}\right)^n$

Vu que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\left(\frac{1}{15}\right)^n \right] = 0$ car $\left(\frac{1}{15}\right) \in]-1, 1[$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

Compte tenu :

□ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

□ (u_n) est une suite croissante et (v_n) est une suite décroissante.

□ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et par suite elles convergent vers la même limite

4) a- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 9u_{n+1} + 5v_{n+1} = 3(2u_n + v_n) + (3u_n + 2v_n) = 9u_n + 5v_n = w_n$

Donc (w_n) est une suite constante.

b- (w_n) est une suite constante donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 = 9u_0 + 5v_0 = 5$.

Par suite pour tout $n \in \mathbb{N}$, $9u_n + 5v_n = 5$.

Donc si L est la limite commune des suites (u_n) et (v_n) on aura $9L + 5L = 5$

Ce qui donne $L = \frac{5}{14}$ ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = \frac{5}{14}$.

Exercice n°4

De quoi s'agit-il ?

Similitudes-angles inscrits –symétrie orthogonale.

CORRIGÉ

$$1) a- (\widehat{CA, CB}) \equiv (\widehat{AC, AD}) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} - (\widehat{AB, AC}) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} [2\pi] \quad \text{donc } (\widehat{CA, CB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

De plus, comme ABC est un triangle rectangle en B donc $\frac{CB}{CA} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$$D'où \begin{cases} \frac{CB}{CA} = \frac{1}{2} \\ (\widehat{CA, CB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \quad \text{ce qui justifie que } S(A) = B$$

$$b- \square D'une part (\widehat{AC, AE}) \equiv (\widehat{AC, AD}) [2\pi]$$

$$\equiv (\widehat{CA, CB}) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

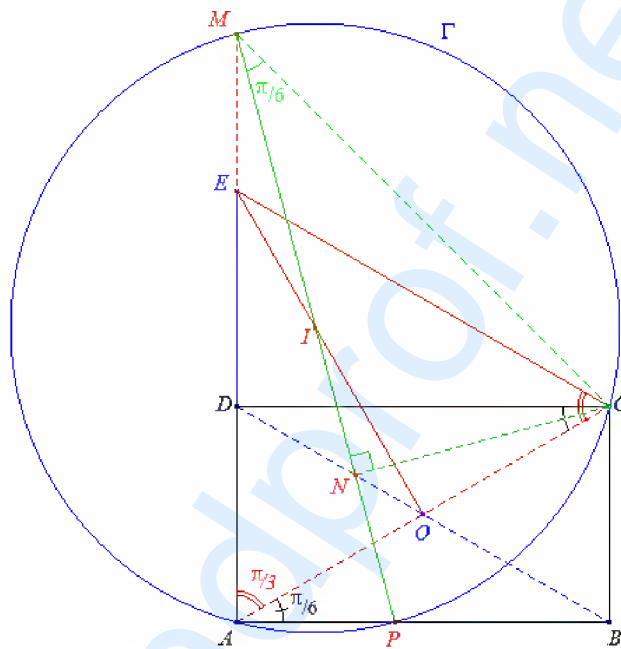
$$D'autre part \left. \begin{array}{l} E = S_{(DC)}(A) \\ D = S_{(DC)}(D) \\ C = S_{(DC)}(C) \end{array} \right\} \text{ donc } (\widehat{EC, ED}) \equiv -(\widehat{AC, AD}) [2\pi]$$

$$\text{Ainsi } \begin{cases} (\widehat{AC, AE}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \\ (\widehat{EC, EA}) \equiv (\widehat{EC, ED}) [2\pi] \\ \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \text{ ce qui prouve que le triangle } ACE \text{ est équilatéral.}$$

$$\square \text{ On a le triangle } ACE \text{ est équilatéral et } O = A * C \text{ donc } \begin{cases} \frac{CO}{CE} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ (\widehat{CE, CO}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$

Conclusion : $S(E) = O$.

2) a-



b- ACE est un triangle équilatéral et $O = A * C$ donc la droite (OE) est la médiatrice du segment $[AC]$

et puisque $I \in [OE] \setminus \{O, E\}$ donc $IA = IC$ or (Γ) est le cercle de centre I et le rayon IA

donc $C \in (\Gamma)$.

3) a- $(\widehat{MP, MC})$ et $(\widehat{AP, AC})$ sont deux angles inscrits dans (Γ) interceptant le même arc orienté \overline{PC}

Donc $(\widehat{MP, MC}) \equiv (\widehat{AP, AC}) [2\pi]$ or $(\widehat{AP, AC}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$ donc $(\widehat{MP, MC}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

$$\text{b- Comme } \begin{cases} (\widehat{MN, MC}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \\ (\widehat{NC, NM}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \text{ donc } (\widehat{CM, CN}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \quad (I)$$

de plus on a $\frac{CN}{CM} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ (II)

d'après (I) et (II) on en déduit $S(M) = N$

$$4) M \in (AD) \text{ et } E \in (AD) \text{ donc } A, E \text{ et } M \text{ sont alignés de plus } \left. \begin{array}{l} S(A) = B \\ S(E) = O \\ S(M) = N \end{array} \right\}$$

et comme toute similitude conserve l'alignement donc B, O et N sont alignés.

D'où $N \in (OB)$ et puisque $D \in (OB)$ on en déduit alors que B, D et N sont alignés.

Exercice n°5

De quoi s'agit-il ?

Résolution dans Z^2 d'une équation du type $ax + by = c$ – détermination des points d'une droite à coordonnées entières

CORRIGÉ

1) a- $3 \times 0 + 4 \times (-2) = -8$ donc $(0, -2)$ est solution de (E).

b- Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ solution de (E).

On a : $\left. \begin{array}{l} 3x + 4y = -8 \\ 3 \times 0 + 4 \times (-2) = -8 \end{array} \right\}$ donc $3x = -4 \times (y + 2)$

comme $\left. \begin{array}{l} 3 \wedge -4 = 1 \\ 3 \wedge (-4) = 1 \end{array} \right\}$ alors d'après Gauss $3 \mid (y + 2)$ ainsi $y = 3k - 2$ où $k \in \mathbb{Z}$

par suite $3x = -4 \times (3k - 2)$ d'où $x = -4k$ ainsi $(x, y) = (-4k, 3k - 2)$ où $k \in \mathbb{Z}$

reciproquement : soit $(x, y) = (-4k, 3k - 2)$ où $k \in \mathbb{Z}$

on a : $3 \times (-4k) + 4 \times (3k - 2) = -8$ donc (x, y) est solution de (E).

Conclusion : $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{ (-4k, 3k - 2), k \in \mathbb{Z} \}$

2) a- $\left\{ \begin{array}{l} M(x, y) \in \Delta \\ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{array} \right\}$ signifie $\left\{ \begin{array}{l} 3x + 4y = -8 \\ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{array} \right\}$ signifie $(x, y) = \{ (-4k, 3k - 2), k \in \mathbb{Z} \}$

Donc $AM = \sqrt{(-4k)^2 + (3k)^2} = 5 \times |k|$ où $k \in \mathbb{Z}$

Par suite AM est un multiple de 5.

b- $N(x, y) \in \Delta$ signifie $3x + 4y = -8$ signifie $y = -\frac{8+3x}{4}$

Donc $AN^2 = x^2 + \left(-\frac{3x}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}x^2$ par suite $AN = \frac{5}{4}|x|$.

c- Si AN est un multiple de 5 alors il s'écrit sous la forme $AN = 5|k|$ où $k \in \mathbb{Z}$

Donc $\frac{5}{4}|x| = 5|k|$ où $k \in \mathbb{Z}$ ainsi $|x| = 4|k|$ où $k \in \mathbb{Z}$ d'où x est un entier

Comme $y = -\frac{8+3x}{4} = -2 - \frac{3x}{4}$ donc $y = -2+3k$ où $k \in \mathbb{Z}$ d'où y est un entier

Conclusion : Si AN est un multiple de 5 alors x et y sont des entiers.

grandprof.net