

EPREUVE DE MATH SECTION MATH SESSION PRINCIPALE 2009

EXERCICE N°1

De quoi s'agit-il ?

Nombres complexes-Rotations-arithmétique-Probabilités

SOLUTION

- 1) Réponse - b - 2) Réponse - c - 3) Réponse - c - 4) Réponse - b -

EXERCICE N°2

De quoi s'agit-il ?

Fonction logarithme népérien-Fonction exponentielle-Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone-calcul intégral-Calcul d'aire

SOLUTION

1) a- En posant $t = -\sqrt{x}$ on aura $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(\frac{\ln(1+t)}{t^2} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{t} \times \frac{\ln(1+t)}{t} \right) = -\infty$.

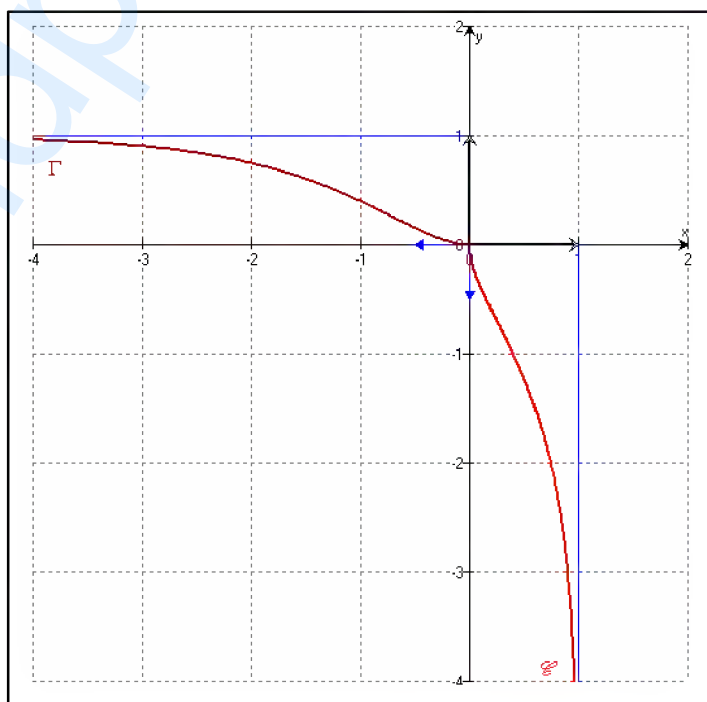
b- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = -\infty$

donc f n'est pas dérivable à droite en 0

et (\mathcal{E}) admet au point O une

demi-tangente verticale dirigé vers le bas.

- 2) a- f est définie et strictement décroissante sur $[0, 1[$ donc réalise une bijection de $[0, 1[$ sur $f([0, 1[)$ de plus f est continue sur $[0, 1[$ donc $f([0, 1[) =]-\infty, 0]$.



Conclusion : f réalise une bijection de $[0, 1[$ sur $f([0, 1[) =]-\infty, 0]$.

b- $(\Gamma) = S_{D, y=x}(\mathcal{E})$

(\mathcal{E}) admet au point O une demi-tangente verticale donc (Γ) admet en ce point

une demi-tangente horizontale.

3) a- On a : $\begin{cases} x \in]-\infty, 0] \\ f^{-1}(x) = y \end{cases}$, si et seulement si $\begin{cases} y \in [0, 1[\\ f(y) = x \end{cases}$

$$x = f(y) = \ln(1 - \sqrt{y}) \Leftrightarrow e^x = 1 - \sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt{y} = 1 - e^x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = (1 - e^x)^2.$$

b- $\mathcal{A} = \int_{-\ln 2}^0 f^{-1}(x) dx = \int_{-\ln 2}^0 (1 - 2e^x + e^{2x}) dx = \left[x - 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} \right]_{-\ln 2}^0 = \left(-2 + \frac{1}{2} \right) - \left(-\ln 2 - \frac{2}{e^{\ln 2}} + \frac{1}{2e^{\ln 4}} \right)$

donc $\mathcal{A} = \ln 2 - \frac{5}{8}$ u.a

c- En utilisant la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = x$ on aura :

$$-\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1 - \sqrt{x}) dx = \int_0^{\frac{1}{4}} |f(x)| dx = \frac{1}{4} \times \ln 2 - \mathcal{A} = \frac{\ln 2}{4} - \ln 2 + \frac{5}{8} \quad (f^{-1}(0) = 0 \text{ et } f^{-1}(-\ln 2) = \frac{1}{4})$$

D'où $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1 - \sqrt{x}) dx = \frac{3}{4} \ln 2 - \frac{5}{8}$

Autrement : $\mathcal{A} = \int_0^{\frac{1}{4}} (f(x) - (-\ln 2)) dx = \ln 2 - \frac{5}{8}$ donc $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1 - \sqrt{x}) dx = \ln 2 - \frac{5}{8} - \frac{1}{4} \ln 2 = \frac{3}{4} \ln 2 - \frac{5}{8}$

EXERCICE N°3

De quoi s'agit-il ?

Similitude directe – Similitude indirecte – symétrie orthogonale – Composée d'une similitude directe et d'une symétrie orthogonale.

SOLUTION

1) voir figure ci-contre.

2) a- $\widehat{(\overline{JA}, \overline{JK})} \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$ est une mesure de l'angle de f

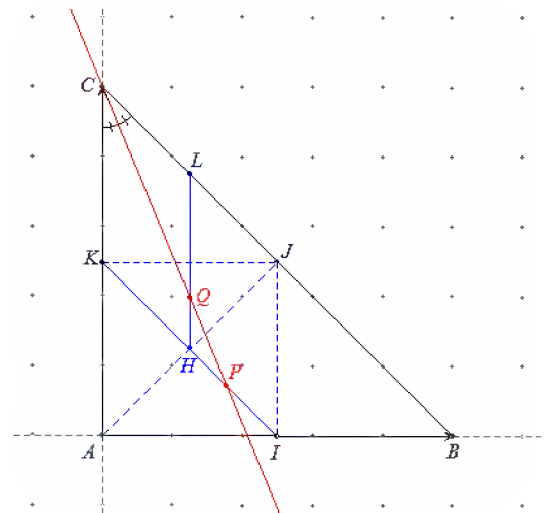
en effet :

$$\begin{cases} \overline{JK} = \frac{1}{2} \overline{BA} = \overline{IA} \text{ car } J = B * C, K = A * C \text{ et } I = A * B \\ \widehat{(\overline{AI}, \overline{AK})} \equiv \widehat{(\overline{AB}, \overline{AC})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ AI = AK \text{ car } ABC \text{ est isocèle en } A, K = A * C \text{ et } I = A * B \end{cases}$$

donc AIJK est un carré direct dont [JA] est une diagonale

ainsi $\widehat{(\overline{JA}, \overline{JK})} \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$

Autrement :



$(JK) // (AB)$ car dans le triangle ABC on a : $J = B * C$ et $K = A * C$

donc $(\widehat{JC}, \widehat{JK}) \equiv (\widehat{BC}, \widehat{BA}) [2\pi]$

or $(\widehat{BC}, \widehat{BA}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ car ABC est un triangle rectangle et isocèle en A de sens direct

par suite $(\widehat{JA}, \widehat{JK}) \equiv (\widehat{JA}, \widehat{JC}) + (\widehat{JC}, \widehat{JK}) [2\pi]$

$$\equiv -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} [2\pi] \quad \text{d'où} \quad (\widehat{JA}, \widehat{JK}) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$\square \frac{JK}{JA} = \frac{\frac{1}{2}BA}{\frac{1}{2}BC} = \frac{BA}{BC} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ est le rapport de f .

b- $\left\{ \begin{array}{l} \frac{JL}{JK} = \frac{\frac{1}{4}BC}{\frac{1}{2}BA} = \frac{BC}{2BA} = \frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ (\widehat{JA}, \widehat{JK}) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi] \end{array} \right. \quad \text{d'où} \quad f(K) = L.$

c- $\left\{ \begin{array}{l} (\widehat{JI}, \widehat{JH}) \equiv (\widehat{CA}, \widehat{JA}) \equiv (\widehat{AC}, \widehat{AJ}) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi] \\ \frac{JH}{JI} = \frac{\frac{1}{2}JA}{\frac{1}{2}AC} = \frac{\frac{1}{2}BC}{BA} = \frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right. \quad \text{d'où} \quad f(I) = H.$

3) a- $z' = -\frac{1}{2}(1+i)\bar{z} + \frac{1}{2}(1+i)$ est de la forme $z' = a\bar{z} + b$ où $|a| = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$

donc φ est une similitude indirecte de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Or $-\frac{1}{2}(1+i)\bar{z}_C + \frac{1}{2}(1+i) = \frac{i}{2}(1+i) + \frac{1}{2}(1+i) = \frac{1}{2}(i-1) + \frac{1}{2}(1+i) = i = z_C$ d'où $\varphi(C) = C$

et comme $|a| \neq 1$ donc C est l'unique point invariant par f qui n'est autre que le centre.

b- $\square z_I = \frac{1}{2} \quad \square z_K = \frac{1}{2}i \quad \square z_J = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \quad \square z_H = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

c- $\square -\frac{1}{2}(1+i)\bar{z}_I + \frac{1}{2}(1+i) = -\frac{1}{4}(1+i) + \frac{1}{2}(1+i) = \frac{1}{4}(1+i) = z_H$ d'où $\varphi(I) = H$.

$\square -\frac{1}{2}(1+i)\bar{z}_J + \frac{1}{2}(1+i) = -\frac{1}{4}(1+i)(1-i) + \frac{1}{2}(1+i) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+i) = \frac{1}{2}i = z_K$ d'où $\varphi(J) = K$.

$$d- \begin{cases} \bullet f \circ S_{(IK)}(I) = f(I) = H \text{ donc } f \circ S_{(IK)}(I) = H \\ \bullet f \circ S_{(IK)}(J) = f(A) = K \text{ donc } f \circ S_{(IK)}(J) = K \\ \bullet f \circ S_{(IK)} \text{ est une similitude indirecte comme composée} \\ \text{d'une similitude directe et antidéplacement} \end{cases}$$

Donc $f \circ S_{(IK)}$ et φ sont deux similitudes indirectes qui coïncident en deux points distincts par suite $\varphi = f \circ S_{(IK)}$.

4) a- La droite Δ est portée par la bissectrice intérieure de $(\overline{CJ}, \overline{CK})$ (ou $(\overline{CI}, \overline{CH})$)

b- $\square P \in (IK)$ alors $S_{(IK)}(P) = P$ par suite $\varphi(P) = f \circ S_{(IK)}(P) = f(P)$ donc $\varphi(P) = f(P)$.

$\square P \in (IK)$ alors $f(P) \in f\langle (IK) \rangle = (LH)$ par suite $\varphi(P) \in (LH)$

$P \in \Delta$ et Δ étant l'axe de φ alors $\varphi(P) \in \varphi(\Delta) = \Delta$

Ainsi $\varphi(P) \in \Delta \cap (LH) = \{Q\}$ par conséquent $\varphi(P) = Q$.

EXERCICE N°4

De quoi s'agit-il ?

Ellipse-équation de la tangente à une ellipse en l'un de ses points-Aire d'un triangle

SOLUTION

1) a- L'ellipse (\mathcal{E}) a pour équation, dans le repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

$a = 1$, $b = 2$ et comme $a < b$, l'axe focal est (O, \vec{j}) .

Les sommets suivant l'axe focal de (\mathcal{E}) ont pour coordonnées $(0, -2)$ et $(0, 2)$

Les sommets suivant l'axe non focal de (\mathcal{E}) ont pour coordonnées $(-1, 0)$ et $(1, 0)$

Comme $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{3}$ donc les foyers de (\mathcal{E}) ont pour coordonnées $(0, -\sqrt{3})$ et $(0, \sqrt{3})$

b- voir figure ci-contre

$$c- \frac{\cos^2 x}{1^2} + \frac{4 \sin^2 x}{2^2} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Donc $M \in (\mathcal{E})$

2) Une équation de la tangente à (\mathcal{E}) en un point $M(x_0, y_0)$ est :

$$T: \frac{xx_0}{1^2} + \frac{yy_0}{2^2} = 1 \text{ par suite pour } M(\cos\theta, 2\sin\theta) \text{ on aura}$$

$$T: x \cos\theta + \frac{2y \sin\theta}{4} = 1 \text{ d'où } T: 2x \cos\theta + y \sin\theta - 2 = 0.$$

3) a- Le triangle OPQ est rectangle en O

$$\text{donc l'aire } \mathcal{A} = \frac{1}{2} \times OP \times OQ$$

$$\text{Or } \begin{cases} P \in (O, \vec{i}) \\ P \in T \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} y_p = 0 \\ 2x_p \cos\theta = 2 \end{cases} \text{ d'où } P\left(\frac{1}{\cos\theta}, 0\right)$$

$$\text{de même } \begin{cases} Q \in (O, \vec{j}) \\ Q \in T \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x_Q = 0 \\ y_Q \sin\theta = 2 \end{cases} \text{ d'où } Q\left(0, \frac{2}{\sin\theta}\right)$$

De plus $\cos\theta > 0$ et $\sin\theta > 0$ pour tout $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\text{Ainsi } \mathcal{A} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos\theta} \times \frac{2}{\sin\theta} = \frac{2}{2 \cos\theta \sin\theta} = \frac{2}{\sin(2\theta)}$$

$$\text{donc } \mathcal{A} = \frac{2}{\sin(2\theta)}.$$

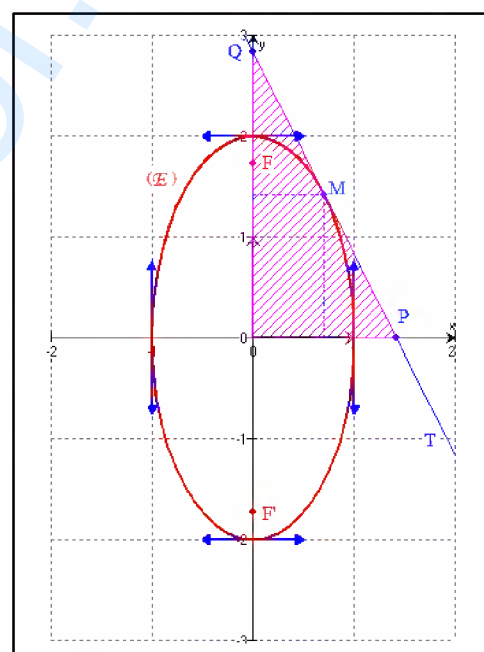
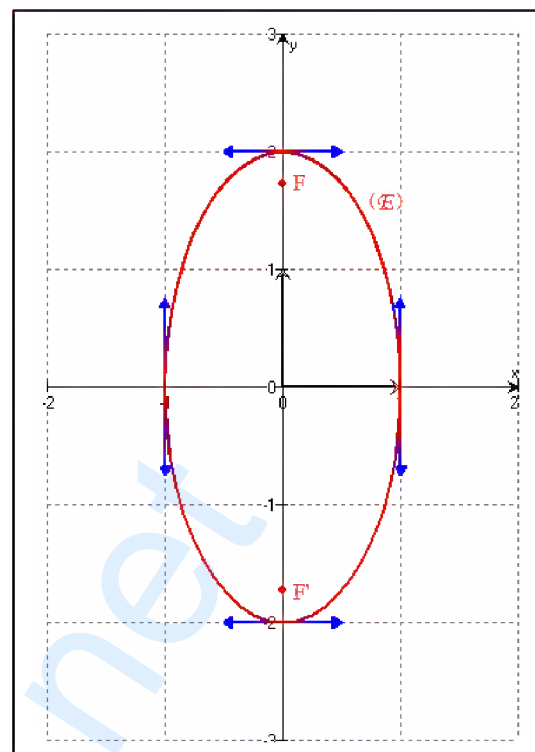
b- L'aire $\mathcal{A} = \frac{2}{\sin(2\theta)}$ est minimale si et seulement si

$\sin 2\theta$ est maximum or $0 < 2\theta < \pi$ donc $0 < \sin 2\theta \leq 1$

d'où \mathcal{A} est minimale si et seulement si $2\theta = \frac{\pi}{2}$

par suite $\theta = \frac{\pi}{4}$ d'où : $P(\sqrt{2}, 0)$, $Q(0, 2\sqrt{2})$ et $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$

ce qui prouve que M est le milieu du segment $[PQ]$.



EXERCICE N°5**De quoi s'agit-il ?**

Equations différentielles -Recherche d'un ensemble de fonctions.

SOLUTION

1) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ est l'ensemble des fonctions

définies sur \mathbb{R} par : $f(x) = A \sin x + B \cos x$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

2) a- $g(x) = \cos x$ est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et $g'(x) = -\sin x$

$$\text{donc } g'(x) + g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x + \sin x = 0 \quad \text{ainsi } g'(x) + g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$$

par suite g est un élément de E .

b- Comme f est un élément de E donc pour tout réel x on a : $f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$

$$\text{et par suite } f''(x) - f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 \quad \text{d'où } f''(x) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

c- Si f est un élément de E alors pour tout réel x on a : $f'(x) = -f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\text{ce qui donne : pour tout réel } x, \quad f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -f\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = -f(x).$$

$$\text{Or d'après b- si } f \text{ est un élément de } E \text{ alors pour tout réel } x, \quad f''(x) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\text{Par suite : pour tout réel } x, \quad f''(x) = -f(x) \quad \text{d'où } f''(x) + f(x) = 0$$

C'est-à-dire f est une solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

d- d'après c- si f est un élément de E alors f est une solution de l'équation différentielle

$$y'' + y = 0 \quad \text{donc } f(x) = A \sin x + B \cos x \quad \text{où } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\text{D'autre part, comme } f \text{ est un élément de } E \text{ donc pour tout réel } x \text{ on a : } f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$$

$$\text{Ce qui donne, pour tout réel } x, \quad (A \cos x - B \sin x) + \left(A \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + B \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 0$$

donc pour tout réel x , $A \cos x - B \sin x + A \cos x + B \sin x = 2A \cos x = 0$ ainsi $A = 0$

d'où $f(x) = B \cos x$ où $B \in \mathbb{R}$.

Conclusion : E est l'ensemble des fonctions définies sur \mathbb{R} par : $f(x) = B \cos x$ où $B \in \mathbb{R}$.

FIN.

grandprof.net