Examen du baccalauréat **Session principale**

Session de Juin 2016

Section : Sciences techniques

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

1)a) $A(1, 0, 2)$; $B(-2, 1, -1)$ et $C(0, 0, 1)$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\-3\end{pmatrix} \ ; \ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} \ ; \ \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

b) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ d'où les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés, donc ils déterminent un plan P.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à P.

$P : -x+z+c=0$

$A(1, 0, 2)\in P$, d'où $-1+2+c=0 \Leftrightarrow c=-1$.

$-x+z-1=0 \Leftrightarrow x-z+1=0$.

$P : x-z+1=0$.

2) $I(1, -1, -1)$ et $J(-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$, Δ la droite passant par I et perpendiculaire au plan P.

a) $P : x-z+1=0$. $J(-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})\in P$, car $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=0$.

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\0\\\frac{3}{2}\end{pmatrix} ; \ \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \ \text{on a} \ \overrightarrow{IJ}=\frac{3}{2}\ \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ qui est normal au plan P, d'où $\overrightarrow{IJ}$ est normal au plan P, donc il est un vecteur directeur de la droite Δ.

$\overrightarrow{IJ}$ est un vecteur directeur de la droite Δ et I appartient à donc J appartient à Δ.

Ainsi la droite Δ coupe le plan P en J.

b) $$IJ=\left\|\overrightarrow{IJ}\right\|=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+0^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{18}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

3)a) $$S : x^2+y^2+z^2-2x+2y+2z-2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y+1)^2-1+(z+1)^2-1-2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=5$$

D'où S est la sphère de centre $I(1,-1,-1)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$.

b) $d(I,P)=\dfrac{|1+1+1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}<R$, d'où le plan P coupe la sphère S suivant un cercle (C) de

rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{\sqrt{5}^2-\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{5-\dfrac{9}{2}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

D'autre part $IJ=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=d(I,P)$, d'où J est le projeté orthogonal du centre I de la sphère S sur le plan P. Par conséquent J est le centre du cercle (C).

Ainsi P coupe la sphère suivant le cercle (C) de centre J et de rayon $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

4) Pour $\theta\in[0,2\pi]$ on considère le point $N(1+\cos\theta,-1+\sin\theta,-3)$.

a) $S:(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=5$. $N(1+\cos\theta,-1+\sin\theta,-3)$.

$(1+\cos\theta-1)^2+(-1+\sin\theta+1)^2+(-3+1)^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta+4=5$.

D'où $N\in S$.

b) $P: x-z+1=0$. $N(1+\cos\theta,-1+\sin\theta,-3)$.

$1+\cos\theta+3=4+\cos\theta\neq 0$, car $-1\leq\cos\theta\leq 1$. D'où $N\notin P$.

c) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}\cos\theta\\1-\sin\theta\\-5\end{pmatrix}$; $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AN}=-\cos\theta-5=-5-\cos\theta$.

d) Soit V le volume du tétraèdre ABCN.

$V=\dfrac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AN}\right|=\dfrac{1}{6}|-5-\cos\theta|=\dfrac{1}{6}(5+\cos\theta)$.

Le volume V est minimal lorsque $\cos\theta$ prend est minimal et cela pour $\theta=\pi$.

Exercice 2

1)a) $(3-i\sqrt{3})^2=3^2-2i\times 3\sqrt{3}+(i\sqrt{3})^2=9-6i\sqrt{3}-3=6-6i\sqrt{3}$.

b) $(E): z^2-(1+i\sqrt{3})z-2+2i\sqrt{3}=0$

$$\begin{aligned}\Delta&=(1+i\sqrt{3})^2-4\times(-2+2i\sqrt{3})\\&=1+2i\sqrt{3}+(i\sqrt{3})^2+8-8i\sqrt{3}\\&=1+2i\sqrt{3}-3+8-8i\sqrt{3}\\&=6-6i\sqrt{3}=(3-i\sqrt{3})^2\quad;\quad\delta=3-i\sqrt{3}\end{aligned}$$

$z_1=\dfrac{1+i\sqrt{3}+3-i\sqrt{3}}{2}=2$; $z_2=\dfrac{1+i\sqrt{3}-3+i\sqrt{3}}{2}=-1+i\sqrt{3}$.

$S_{\mathbb{C}}=\{2,-1+i\sqrt{3}\}$.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

a) (C) le cercle de centre O et passant par le point A d'affixe 2.

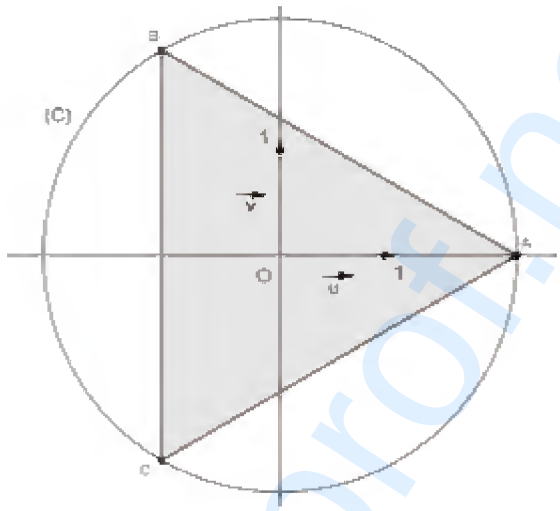
Voir figure.

b) $b = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$c = \bar{b} = \overline{2\,e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

c) $OB = |b| = 2$, d'où $B \in (C)$; $OC = |c| = 2$, d'où $C \in (C)$.

d)



3)a) $b = -1 + i\sqrt{3}$; $c = \bar{b} = -1 - i\sqrt{3}$

$c - b = -2\,i\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{c-b}{2} = -\,i\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{c-b} = \frac{1}{-i\sqrt{3}} = i\,\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\frac{c}{b-2} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}\quad -3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}\quad -3-i\sqrt{3}} = \frac{3+i\sqrt{3}+3i\sqrt{3}-3}{-3^{\,2}+\sqrt{3}^{\,2}} = \frac{4i\sqrt{3}}{12} = \frac{i\sqrt{3}}{3}.$$

Ainsi $\frac{c}{b-2} = \frac{2}{c-b} = \frac{i\sqrt{3}}{3}$.

b) $\frac{c}{b-2} = \frac{2}{c-b} = \frac{i\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \arg\left(\frac{c}{b-2}\right) \equiv \arg\left(\frac{2}{c-b}\right) \equiv \arg\left(\frac{i\sqrt{3}}{3}\right) \quad 2\pi$

$\Rightarrow \arg\left(\frac{c}{b-2}\right) \equiv \arg\left(\frac{2}{c-b}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \quad 2\pi$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC} \equiv \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OA} \equiv \frac{\pi}{2} \quad 2\pi$.

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC} \equiv \frac{\pi}{2} \quad 2\pi$, d'où O appartient à la hauteur issue de C du triangle ABC.

$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, d'où O appartient à la hauteur issue de A du triangle ABC.

O est donc l'orthocentre du triangle ABC.

Exercice 3

$f(x) = (x+1)e^{1-x}\ ;\ x \in IR.$

1)a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)e^{1-x} = -\infty.$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x} e^{1-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) e^{1-x} = +\infty$, car $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, d'où la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de (-∞).

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)e^{1-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -e(-xe^{-x}) + e^{1-x} = 0$, car $\lim\limits_{t\to-\infty} e^{t} = 0$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} t\,e^{t} = 0.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, d'où la courbe (C) admet l'axe des abscisses comme asymptotes au voisinage au voisinage de (+∞).

2)a) $f(x) = (x+1)e^{1-x}\ ;\ x \in IR.$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+1)'e^{1-x} + (x+1)(e^{1-x})' \\ &= e^{1-x} - (x+1)e^{1-x} = -x e^{1-x}\ ;\ x \in IR. \end{aligned}$$

b) $f'(x) = -xe^{1-x}\ ;\ x \in IR.$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

3)a) $f'(x) = -xe^{1-x}\ ;\ x \in IR.$

$f''(x) = \left(-xe^{1-x}\right)' = -e^{1-x} + x\,e^{1-x} = (x-1)e^{1-x}\ ;\ x \in IR.$

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow (x-1)e^{1-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

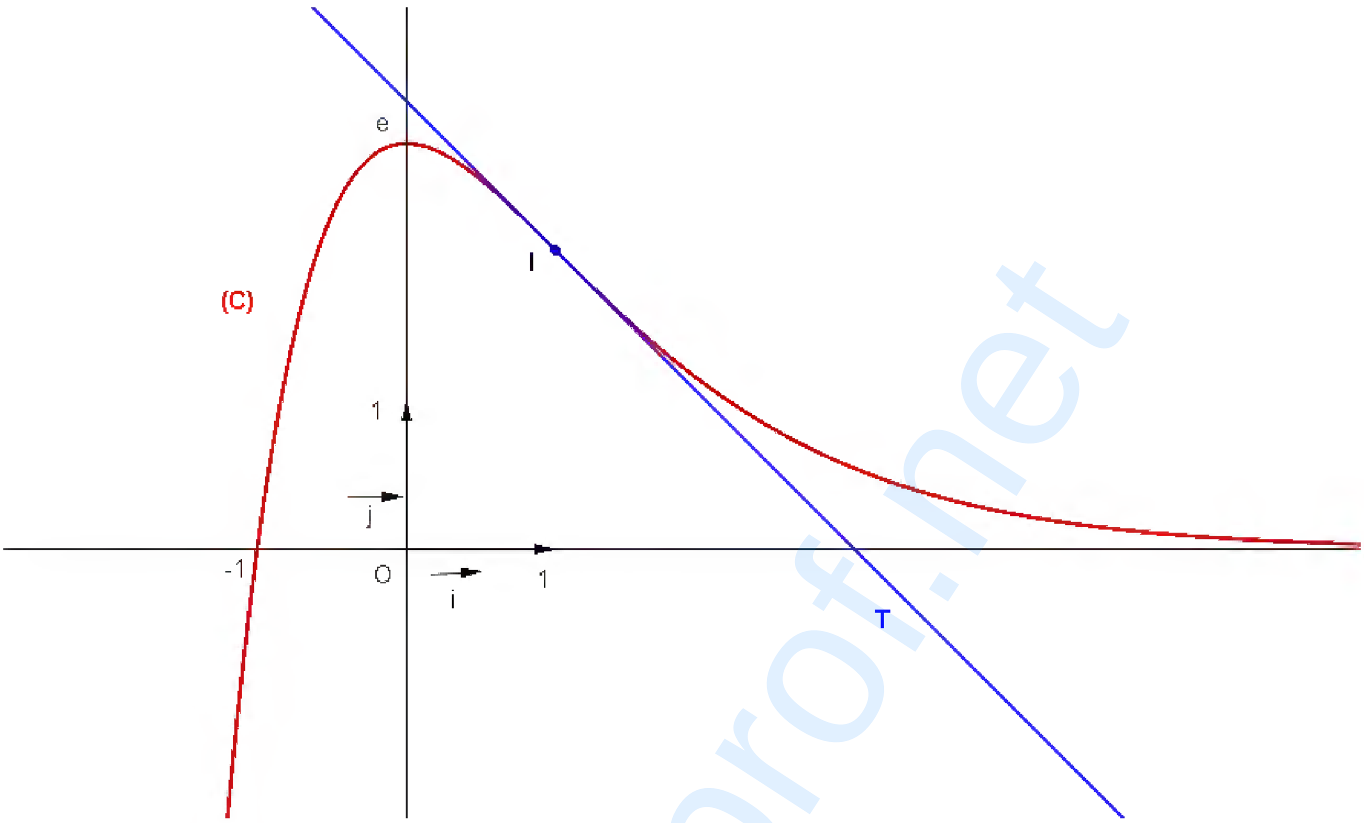
On peut remarquer que le signe de f'' est celui de $x-1$.

f'' s'annule en 1 en changeant de signe d'où le point $I(1, f(1))$ c'est-à-dire le point $I(1, 2)$ est un point d'inflexion pour la courbe (C) de f.

b) T la tangente à (C) au point I.

$$T : y = f'(1)(x-1) + f(1) = -(x-1) + 2 = -x + 3.$$

4) La courbe (C).



5) Soit $\alpha > -1$; $I(\alpha) = \int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx$.

a) $I(\alpha) = \int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx$ est l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = \alpha$.

b) On a $f(x) = (x+1)e^{1-x}$; $x \in IR$ et $f''(x) = (x-1)e^{1-x}$; $x \in IR$.

$$f''(x) + 2e^{1-x} = (x-1)e^{1-x} + 2e^{1-x} = (x+1)e^{1-x} = f(x).$$

Ainsi $f(x) = f''(x) + 2e^{1-x}$; pour tout $x \in IR$.

c) $$I(\alpha) = \int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{-1}^{\alpha} f''(x) + 2e^{1-x}\;dx$$

$$= \left[f'(x) - 2e^{1-x}\right]_{-1}^{\alpha} = \left[-xe^{1-x} - 2e^{1-x}\right]_{-1}^{\alpha}$$

$$= \left[-(x+2)e^{1-x}\right]_{-1}^{\alpha} = -(\alpha+2)e^{1-\alpha} + e^2.$$

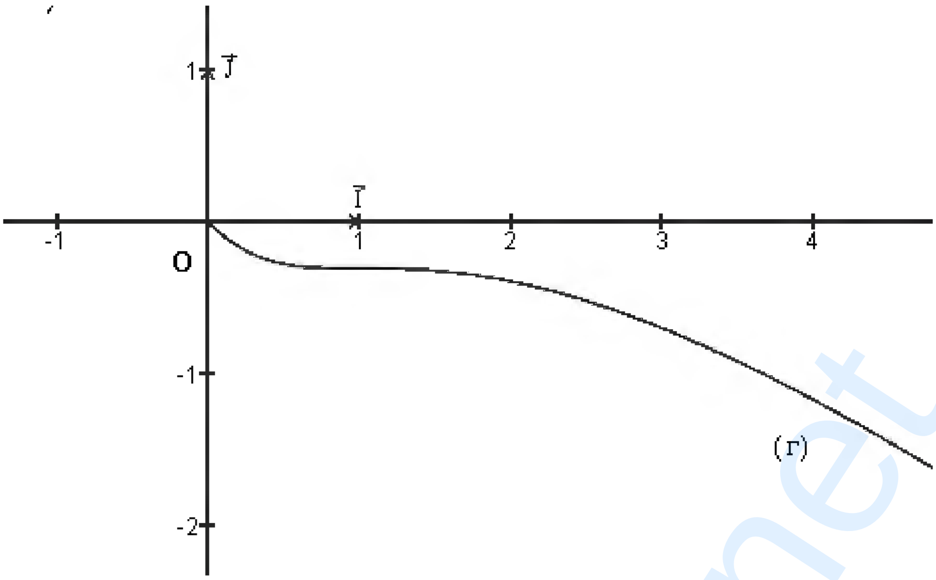
Ainsi $I(\alpha) = e^2 - (\alpha+2)e^{1-\alpha}$.

d) $$\lim_{\alpha \to +\infty} I(\alpha) = \lim_{\alpha \to +\infty} e^2 - (\alpha+2)e^{1-\alpha} = \lim_{\alpha \to +\infty} e^2 + e(-\alpha)e^{-\alpha} + 2e^{1-\alpha} = e^2.$$

$\lim_{\alpha \to +\infty} I(\alpha) = e^2$ est l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = -1$.

Exercice 4

1) La courbe (Γ) est celle de la fonction f définie sur $0, +\infty$ par $f(x) = -x + \ln(1+x^2)$.



On peut remarquer que la courbe de f est au-dessous de l'axe des abscisses, donc
$f(x) \leq 0$, pour tout $x \in 0, +\infty \Rightarrow -x + \ln(1+x^2) \leq 0$, pour tout $x \in 0, +\infty$

$\Rightarrow \ln(1+x^2) \leq x$, pour tout $x \in 0, +\infty$

2) $(U_n) : \begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}\ln(1+U_n^2),\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrons que $U_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Raisonnons par récurrence :

- $U_0 = \dfrac{3}{2} > 0$, d'où l'inégalité est vérifiée pour $n = 0$. .
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'inégalité est vraie pour n, c'est-à-dire $U_n > 0$.
- Montrons que l'inégalité est vraie pour $n+1$.

$U_n > 0 \Rightarrow 1 + U_n^2 > 1$

$\Rightarrow \ln\left(1+U_n^2\right) > \ln(1)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\ln\left(1+U_n^2\right) > 0$

$\Rightarrow U_{n+1} > 0.$

D'où l'inégalité est vraie pour $n+1$.

D'après le principe de raisonnement par récurrence l'inégalité est vraie pour pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $U_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) On a d'après la question 1) $\ln(1+x^2) \leq x$, pour tout $x \in 0, +\infty$.

D'autre part $U_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'où $\ln(1+U_n^2) \leq U_n$; pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\ln(1+U_n^2) \leq U_n \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1+U_n^2) \leq \frac{1}{2}U_n$$
$$\Rightarrow U_{n+1} \leq \frac{1}{2}U_n$$

Ainsi $U_{n+1} \leq \frac{1}{2}U_n$; pour tout $n \in IN$.

c) On a $U_{n+1} \leq \frac{1}{2}U_n$; pour tout $n \in IN$.

$$U_1 \leq \frac{1}{2}U_0$$
$$U_2 \leq \frac{1}{2}U_1$$
$$\otimes \quad . \qquad .$$
$$. \qquad .$$

Par itération, multiplication et simplification.

$$U_{n-1} \leq \frac{1}{2}U_{n-2}$$
$$U_n \leq \frac{1}{2}U_{n-1}$$

$$U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n U_0$$

On peut remarquer que cela est possible puisque tous les termes sont strictement positifs.

D'où on a $U_n \leq \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$; pour tout $n \in IN$.

d) D'après ce qui précède on a $0 < U_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$; pour tout $n \in IN$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

3) (S_n) la suite définie par $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$; pour tout $n \in IN$.

a) $S_{n+1} - S_n = (U_0 + U_1 + ... + U_n + U_{n+1}) - (U_0 + U_1 + ... + U_n) = U_{n+1} > 0$.
D'où $S_{n+1} > S_n$ pour tout $n \in IN$.

Ainsi la suite (S_n) est croissante.

b) On a $U_n \leq \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$; pour tout $n \in IN$.

$S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$; pour tout $n \in IN$.

$$U_0 \leq \frac{3}{2}$$

$$U_1 \leq \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$U_{n-1} \leq \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$U_n \leq \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

Par itération et addition

$$S_n \leq \frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)$$

D'autre part on a $1+\frac{1}{2}+\ldots\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

Par suite $S_n \leq \frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)$

$$\leq \frac{3}{2}\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right) = 3-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

Ainsi $S_n \leq 3-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) On a $S_n \leq 3-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or $3-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \leq 3$, d'où $S_n \leq 3$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi la suite (S_n) est majorée par 3.

La suite (S_n) est croissante et majorée, donc elle converge.