CORRECTION DE DEVOIR DE BACCALAUREAT (PRINCIPALE 2018)

EPREUVE : MATHEMATIQUES

SECTION : SCIENCES TECHNIQUES

Le sujet comporte 4 exercices de difficultés moyennes et faciles.

Exercice n°1 : (facile)

1) a) $e^{\frac{5\pi i}{12}}(e^{\frac{\pi i}{4}} - e^{\frac{-\pi i}{4}}) = (e^{\frac{8\pi i}{12}} - e^{\frac{2\pi i}{12}}) = (e^{\frac{2\pi i}{3}} - e^{\frac{\pi i}{6}})$

$(e^{\frac{8\pi i}{12}} - e^{\frac{2\pi i}{12}}) \quad = e^{\frac{5\pi i}{12}}[(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}) - (\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})]$

$= e^{\frac{5\pi i}{12}}.\sqrt{2}i$

b) $4e^{\frac{2\pi i}{3}} - 4\left(e^{\frac{2\pi i}{3}} - e^{\frac{\pi i}{6}}\right) - 4e^{\frac{\pi i}{6}} = 0$

c) $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a} = -4e^{\frac{\pi i}{6}}$; $z_2 = -2e^{\frac{-\pi i}{6}}$

d) $\begin{cases} z1 = 1 + i\sqrt{3} \\ z2 = -\sqrt{3} + i \end{cases}$

2) a) $i(1 + i\sqrt{3}) = i + i^2\sqrt{3} = -\sqrt{3} + i$

b) $|z_A - z_O| = |iz_B| = |z_B| = |z_B - z_O|$

Implique que : OAB est isocèle.

$|z_A - z_O|^2 + |z_B - z_O|^2 = 4+4 = 8$ et $|z_A - z_B|^2 = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}-1)^2}^{\,2} = 8$

Implique que OAB est rectangle en O (théorie de Pythagore)

c) Voir figure 3

3) a) $|z_C - z_O| = |z_A - z_B| = \sqrt{8}$; OC=AB

$\text{Arg}(\frac{zC - zO}{zA - zB}) = arg\frac{(1-\sqrt{3})+i(\sqrt{3}+1)}{(1+\sqrt{3})+i(\sqrt{3}-1)}$

$= arg\frac{-2 + i\left((1+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}-1)^2\right) + 2}{8}$

$= arg\, i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $(OC)\perp(AB)$

OACB est un quadrilatère de diagonales égaux et orthogonales.
Alors OACB est carrée.

b) Voir figure 3

c) $|z_C| = \sqrt{8}$; $\arg z_C = \arg z_A + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in Z.$

$z_C = 2\sqrt{2}e^{\frac{7\pi i}{12}}$

Exercice n°2 : (moyenne)

1) a) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

Alors A, B et C ne sont pas alignés

b) On a : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est le normal à P, alors P : $-5x - 5z + d = 0$; d est un réel.

A(1, 2, -1) est un point de P alors d=0.
alors P : x+z=0

2) a) A∈Δ (pour α=0)
   b) Δ ($\overrightarrow{AB}$^$\overrightarrow{AC}$, A) alors Δ ⊥ P.
3) a) D(I$_\alpha$, P)=$\frac{|\alpha+1+\alpha-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2|\alpha|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}|\alpha|$
   b) la comparaison entre D(I$_\alpha$, P) et $2\sqrt{2}$ donne :
   - α ∈] -2, 2[: P coupe S
   - α=-2 ou α=2 : P est tangente à S
   - α ∈]-∞, -2[∪]2, +∞[
4) a) D(I$_\alpha$, B)=$\sqrt{(\alpha-1)^2+(-2)^2+(\alpha+1)^2}$=$\sqrt{2\alpha^2+6} = 2\sqrt{2}$
   ⇒ α^2=1
   ⇒ α=1 ou α= -1
   b) |1|=|-1|= 1, alors d'après 4)a) P ∩ S =C$_{(k,\, r)}$
   r=$\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}$=$\sqrt{6}$
   k= Δ ∩ P ; car Δ est le normal à P passant par I$_\alpha$
   ⇒ α+1+α−1=0
   ⇒ α=0
   ⇒ K=A
   Conclusion : P∩S = C$_{(A,\sqrt{6})}$

Exercice n°3 : (facile)

1) a) Voir figure 2.
   b) la calculatrice donne r = 0,99.
   c) Oui, On peut envisager un ajustement affin car |r|~ 1.
2) a) Par la méthode de moindres carrés : Y =0,000011 x +4,34.
   b) Par la méthode de moindres carrés : X =91011,24 y−391203,85.
3) a) La consommation pour 400 000 km est égale à :
   0,11.10^{-4} ×400000 +4,34= 8,74 L/100km.
   b) la voiture consomme 8,5 L/100km pour un kilométrage est égale à :
   91011,24 ×8,5−391203,85=382 391,69 km.
   Conclusion : A partir de 382 392 km parcourus, la société doit renouvelle la voiture.

Exercice n°4 : (moyenne)

1) a) h (1) =0.
   b)

X	0		1		+∞
h		−	0	+	

2) a) $\lim\limits_{0+} f(x) = \lim\limits_{0+} 1+(x-1)\ln x = 1+(-1)\times -\infty = +\infty$.
   Interprétation graphique : l'axe des ordonnées est asymptote verticale au voisinage de +∞.
   b) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} 1+(x-1)\ln x = 1+(+\infty)\times +\infty = +\infty$.

$\lim\limits_{+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty}\frac{1+(x-1)\ln x}{x} = \lim\limits_{+\infty}\frac{1}{x} + \frac{(x-1)\ln x}{x} = 0 + 1 \times +\infty = +\infty.$

Interprétation graphique : (C) admet une branche parabolique suivant l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

3) a) $f'(x) = \ln x - \frac{(x-1)}{x} = \frac{x\ln x-(x-1)}{x} = \frac{h(x)}{x}$.

b)

x	0		1		$+\infty$
f '		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4) a) f(x)=x $\leftrightarrow$ $1 + (x-1)\ln x = x$

$\leftrightarrow \quad (x-1)\ln x = x - 1$

$\leftrightarrow \begin{cases} 1 \text{ est un solution} \\ \ln x = 1; \text{si } x \neq 1 \end{cases}$

$\leftrightarrow$ 1 et e sont deux solutions de f(x)=x.

b) $f(x)-x = 1 + (x-1)\ln x - x$

$= (x-1)(\ln x - 1)$

x	0		1		e		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c)

x	0		1		e		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Position relative		C est au-dessus de Δ		C est au-dessous de Δ		C est au-dessus de Δ	

5) Voir figure 1

6) a) $\int_1^e x\ln x \, dx = [\frac{x^2}{2}\ln x]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$.

b) $A = \int_1^e |1 + (x-1)\ln x - x|\,dx$

$= \int_1^e x - 1 - (x-1)\ln x \, dx$;

$= [\frac{x^2}{2} - x + (x\ln x - x)]_1^e - \int_1^e x\ln x \, dx$

$= \frac{e^2}{2} - e + \frac{3}{2} - (\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4})$

$\sim 0{,}38$ u.a

7) a) $U_0 = 2 \in [1, e]$ (l'ordre 0 est vraie)

Supposons que $U_n \in [1, e]$ (l'ordre n est vraie)

Montrons que $U_{n+1} \in [1, e]$

On f est continue et strictement croissante, sur $]0, +\infty[\supseteq \mathbb{N}^*$.

Alors $f(U_n) = U_{n+1} \in [f(1), f(e)] = [1, e]$. (l'ordre n+1 est vraie)

b) $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n \leq 0$ (d'après 4) b))

Alors (U_n) est décroissante.

c) $\begin{cases} (U_n) \text{ est décroissante.} \\ U_n \geq 1 \end{cases} \rightarrow (U_n)$ est convergente.

$$\begin{cases} (U_n) \text{ est convergente vers } l \\ U_{n+1} = f(U_n) \\ f \text{ est continue sur }]0,+\infty[\supseteq \mathbb{N}. \end{cases}$$

$\rightarrow l=f(l) \rightarrow l=1$ ou $l=e$ (à rejeter car U_n est décroissante et $U_0=2<e$)

Figure 1

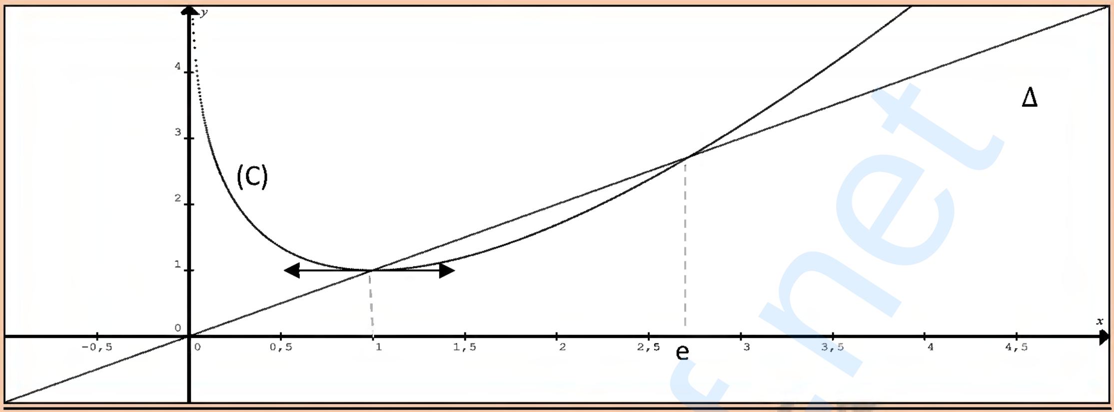

Figure 2

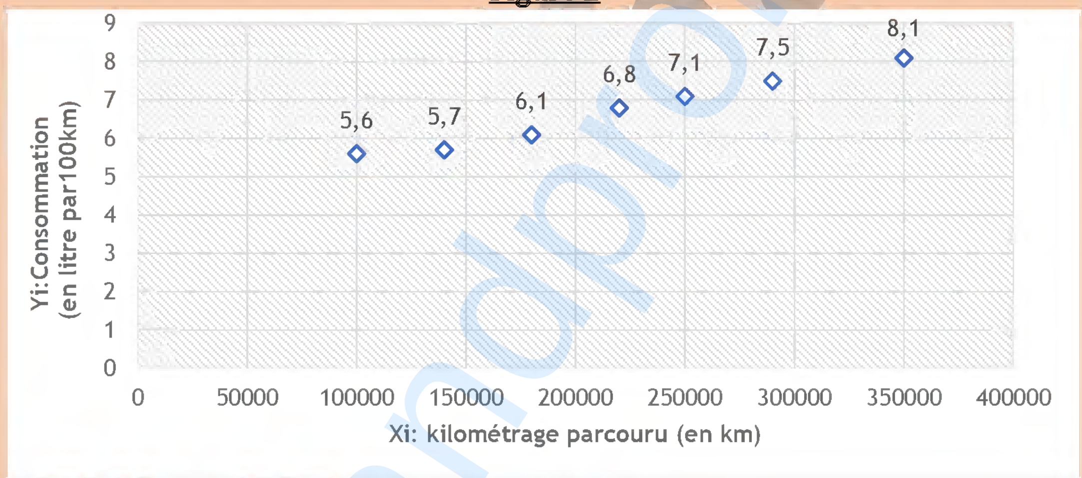

Figure 3