

Exercice 3 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{-1}{x(x+1)}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

3) Tracer (C) .

4) Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une solution unique x_n dans $]0, +\infty[$.

b) Vérifier que $x_n = \frac{1}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$.

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n}$.

Exercice 4 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points $A(3, 2, 4)$; $B(0, 3, 5)$; $C(0, 2, 1)$ et $D(3, 1, 0)$.

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overline{AB} \wedge \overline{AD}$.

b) Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme et calculer son aire.

2) Soit S la sphère de centre $I(2, -2, 5)$ et de rayon $3\sqrt{2}$ et P le plan passant par les points A , B , et D .

a) Vérifier que $\overline{AI} = \frac{1}{3}(\overline{AB} \wedge \overline{AD})$.

b) Montrer que le plan P est tangent à la sphère S au point A .