

## Section : Économie et gestion

## Épreuve : Mathématiques

## Exercice 1

I)		II)	
1)	2)	1)	2)
a	b	b	a

## Exercice 2

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$  et  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$1) \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 - 2 \times 6 + 3 \times 1 = -2.$$

$\det(A) \neq 0$ , d'où la matrice A est inversible.

$$2)a) A \times B + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b)  $A \times B + 2I = 0$ , où 0 est la matrice nulle d'ordre 3.

$$A \times B + 2I = 0 \Leftrightarrow A \times B = -2I$$

$$\Leftrightarrow A \times \left(-\frac{1}{2}B\right) = I$$

D'où l'inverse de A est  $A^{-1} = -\frac{1}{2}B$ .

$$3)a) (S) : \begin{cases} x + 2y + z = -2 \\ 2x + 3y + 2z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$



$$\begin{aligned}
 \text{b) (S): } \begin{cases} x+2y+z=-2 \\ 2x+3y+2z=4 \\ 3x+4y+5z=8 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}B \times A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}B \times \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

D'où  $S_{\mathbb{R}^3} = \{(15, -8, -1)\}$ .

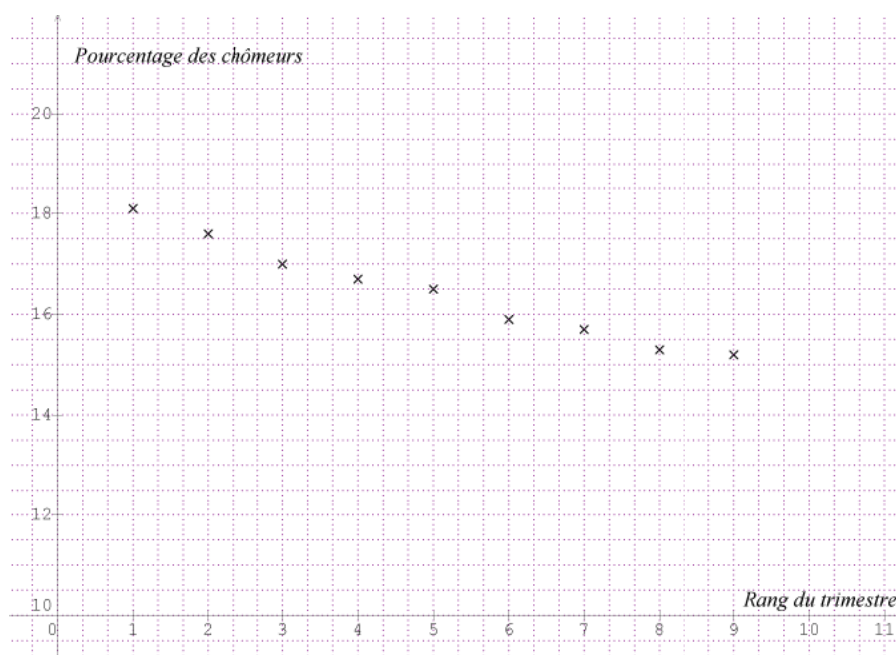
### Exercice 3

Le tableau donne les pourcentages des chômeurs en Tunisie pendant neuf trimestres successifs à compter du premier trimestre de l'année 2012.

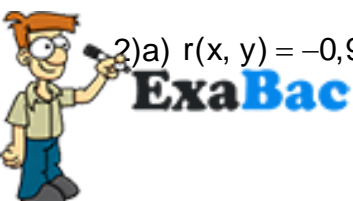
Rang du trimestre $x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Pourcentage des chômeurs $y_i$	18,1	17,6	17	16,7	16,5	15,9	15,7	15,3	15,2

Source : I.N.S

1) Le nuage des points de la série statistique  $(x_i, y_i)$ .



2)a)  $r(x, y) = -0,99$ .



b) On peut remarquer que le nuage des points  $(x_i, y_i)$  est allongé suivant une droite. Donc un ajustement affine entre  $x$  et  $y$  est justifié.

3)a) Une équation de la droite de régression de  $y$  en  $x$  est  $y = -0,38x + 18,31$ .

b) Le pourcentage des chômeurs en Tunisie pendant le deuxième trimestre de l'année 2015. Le deuxième trimestre de l'année 2015 correspond à  $x = 14$ .  
D'où  $y = -0,38 \times 14 + 18,31 = 12,99 \approx 13$ .

Ainsi on estime le pourcentage des chômeurs en Tunisie pendant le deuxième trimestre de l'année 2015 à 13%.

#### Exercice 4

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$ . (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1)a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (1+\ln x) = -\infty$ , car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ .  
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ , d'où l'axe des ordonnées est une asymptote à (C).

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0$ , car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , d'où l'axe des abscisses est une asymptote horizontale pour (C).

2)a)  $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$ ,  $x \in ]0, +\infty[$ .

$$f'(x) = \frac{(1+\ln x)'x - (1+\ln x)}{x^2} = \frac{1 \cdot x - (1+\ln x)}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}, x \in ]0, +\infty[.$$

$$f'(1) = \frac{-\ln 1}{1^2} = 0.$$

b) Le tableau de variation de  $f$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	-
$f$	$-\infty$	1	0

c) On a  $f([1, +\infty[) = ]0, 1]$ , d'où sur l'intervalle  $[1, +\infty[$   $f$  ne s'annule pas.

La fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur  $]0, 1]$ , donc elle réalise une bijection de  $]0, 1]$  sur  $f(]0, 1]) = ]-\infty, 1]$ .

$0 \in ]-\infty, 1]$ , d'où il existe un unique réel  $\alpha \in ]0, 1]$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .

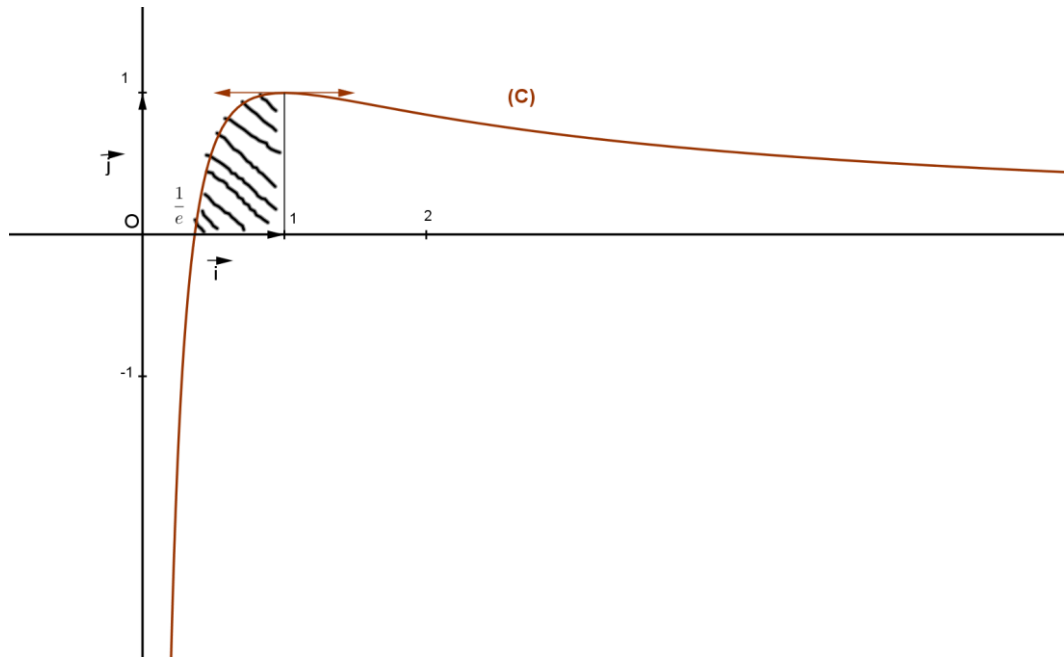
Ainsi l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$ .



$$\begin{aligned}
 \text{Soit } x \in ]0, +\infty[, f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1+\ln x}{x} = 0 \\
 &\Leftrightarrow 1+\ln x = 0 \\
 &\Leftrightarrow \ln x = -1 \\
 &\Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \alpha = \frac{1}{e}.$$

d) La courbe (C) de la fonction f :



3)a) Soit F la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $F(x) = \frac{1}{2}(2+\ln x)\ln x$ .

La fonction  $x \mapsto \ln x$  et la fonction  $x \mapsto 2 + \ln x$  sont dérivables sur  $]0, +\infty[$ , d'où F est dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= \frac{1}{2}(2+\ln x)' \ln x + \frac{1}{2}(2+\ln x)(\ln x)' = \frac{1}{2} \frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{2}(2+\ln x) \frac{1}{x} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{x} (2 + 2\ln x) = \frac{1+\ln x}{x} = f(x)
 \end{aligned}$$

D'où F est une primitive de f sur  $]0, +\infty[$ .

b) R la région du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = e^{-1}$  et  $x = 1$ . Soit A l'aire de cette région R.

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{e^{-1}}^1 f(x) dx = [F(x)]_{e^{-1}}^1 = F(1) - F(e^{-1}) \\
 &= 0 - \frac{1}{2}(2 + \ln e^{-1}) \ln e^{-1} = -\frac{1}{2}(2 + (-1)) \times (-1) = \frac{1}{2} \text{ unité d'aire.}
 \end{aligned}$$

