

Exercice 1 : (4,5 points)

$$\begin{aligned}
 1) \text{ a) } \det(A) &= \begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 4 \times (-2) + 2 \times (-4) + 6 \times 2 \\
 &= -4
 \end{aligned}$$

Comme $\det(A) \neq 0$, alors la matrice A est inversible.

$$b) B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A(B - 2I_3) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$$

$$A(B - 2I_3) = 2I_3 \Leftrightarrow A \times \frac{1}{2}(B - 2I_3) = I_3$$

$$\text{Donc } A^{-1} = \frac{1}{2}(B - 2I_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$2) \text{ a) } (\alpha, \alpha, 0) \text{ est une solution de } (S) \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha - 2\alpha = 1 \\ 3\alpha - \alpha = 2 \\ -\alpha + \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \alpha = 1 \\ 0 = 1 \end{cases} \text{ ce qui est impossible.}$$

Donc il n'existe aucun réel α pour lequel $(\alpha, \alpha, 0)$ soit une solution de (S) .

$$b) (a, b, c) \text{ est une solution de } (S) \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 2b + 6c = 1 \\ 3a - b + 5c = 2 \\ -a + b - 3c = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

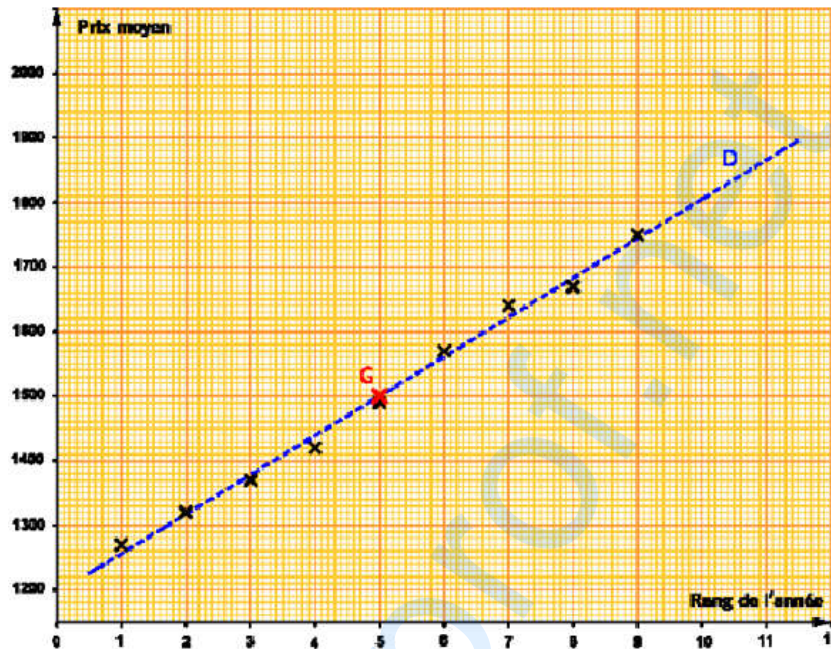
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c) (S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 0 \right) \right\}$$

Exercice 2 : (4,5 points)

1) a) Le nuage :



b) Le nuage a une forme allongée, donc un ajustement affine est possible.

c) $\bar{x} = 5$; $\bar{y} = 1500$; $G(5,1500)$

2) a) Une équation de la droite D de régression de x en y est :

$$y = ax + b$$

Avec $a = 61$ et $b = 1195$

Donc $D: y = 61x + 1195$

b) 2023 correspond à $x = 15$

On estime le prix moyen d'un litre d'essence sans plomb en 2023 à :

$$y = 61 \times 15 + 1195 = 2110 \text{ dinars.}$$

Exercice 3 : (6 points)

1) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1) \ln x = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x - 1 = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.
 \Rightarrow La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe (C) .

b) • $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) \ln x = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} \ln x = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

⇒ La courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction celle de l'axe des ordonnées.

2) • La fonction $x \mapsto x - 1$ est dérivable sur \mathbb{R} , en particulier sur $]0, +\infty[$.

• La fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Donc f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \ln x + (x - 1) \frac{1}{x} = \ln x + \frac{x-1}{x}.$$

3) a)

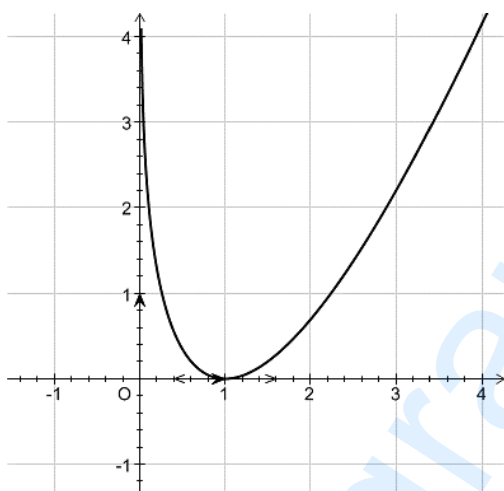
x	0	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	+
x	0	+	+
$\frac{x-1}{x}$	-	0	+
$\ln x$	-	0	+

Donc $\ln x$ et $\frac{x-1}{x}$ sont de même signe sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1, +\infty[$.

b) Tableau de variation de f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
		-	+
f	$+\infty$	0	$+\infty$

4)



5) a) F est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$F'(x) = \left(\frac{2x}{2} - 1\right) \ln x + \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \frac{1}{x} - \frac{2x}{4} + 1$$

$$= (x - 1) \ln x + \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \frac{1}{x} - \frac{x}{2} + 1$$

$$= (x - 1) \ln x + \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} - x \frac{1}{x} - \frac{x}{2} + 1$$

$$= (x - 1) \ln x + \frac{x}{2} - 1 - \frac{x}{2} + 1 = (x - 1) \ln x = f(x)$$

Donc F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

b) L'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ est :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^e |f(x)| dx \\ &= \int_1^e f(x) dx \text{ car } f(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in [1, e] \\ &= [F(x)]_1^e \\ &= F(e) - F(1) \\ &= \left(\frac{e^2}{2} - e \right) \ln e - \frac{e^2}{4} + e - \left(\left(\frac{1^2}{2} - 1 \right) \ln 1 - \frac{1^2}{4} + 1 \right) \\ &= \frac{e^2}{2} - e - \frac{e^2}{4} + e - \left(-\frac{1}{4} + 1 \right) \\ &= \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} \times (ua) \end{aligned}$$

Exercice 4 : (5 points)

1) a) • $u_1 = \frac{2}{1+u_0} = \frac{2}{1+0} = 2$

• $u_2 = \frac{2}{1+u_1} = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$

• Comme $u_0 < u_2 < u_1$, alors la suite (u_n) n'est pas monotone.

b) • $0 \leq u_0 = 0 \leq 2$ vrai

• Supposons que $0 \leq u_n \leq 2$ et montres que $0 \leq u_{n+1} \leq 2$.

$$0 \leq u_n \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 1 + u_n \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{1 + u_n} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq \frac{2}{1 + u_n} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq u_{n+1} \leq 2$$

Donc $0 \leq \frac{2}{3} \leq u_{n+1} \leq 2$

Conclusion : $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) a) $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{2}{1+u_n} - 1}{\frac{2}{1+u_n} + 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{2-1-u_n}{1+u_n}}{\frac{2+2+2u_n}{1+u_n}} \\
&= \frac{1-u_n}{4+4u_n} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{u_n-1}{u_n+2} \\
&= -\frac{1}{2} v_n
\end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$.

(v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2} \in]-1,1[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

$$\text{b) } v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2} \Leftrightarrow v_n(u_n+2) = u_n-1$$

$$\Leftrightarrow v_n u_n + 2v_n = u_n - 1$$

$$\Leftrightarrow u_n - v_n u_n = 1 + 2v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n(1 - v_n) = 1 + 2v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1 + 2v_n}{1 - v_n}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2v_n}{1-v_n} = 1 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

Donc (u_n) converge vers 1.