Examen du baccalauréat **Session principale**

Session de Juin 2016

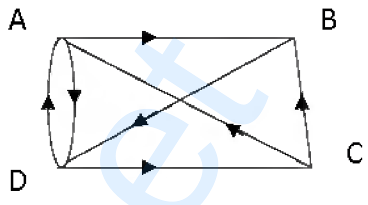
Section : Économie et gestion

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

1)

	A	B	C	D
d^{+}	2	1	2	2
d^{-}	2	2	1	2



(G)

2)a) Le graphe (G) admet une chaine orientée eulérienne (vrai)

Dans le graphe (G), on a $d^{+}(A) = d^{-}(A)$ et $d^{+}(D) = d^{-}(D)$ et pour les sommets B et C seulement on a $d^{+}(B) = d^{-}(B) - 1$ et $d^{+}(C) = d^{-}(C) + 1$, d'où le graphe (G) admet une chaine orientée eulérienne.

b) Le graphe (G) admet un cycle orienté eulérien (faux)

Dans le graphe (G) il y a des sommets tels que $d^{+} \neq d^{-}$ (les sommets B et C), donc (G) n'admet pas de cycle orienté eulérien.

c) La matrice associée au graphe (G) en considérant ses sommets dans l'ordre alphabétique

est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (faux)

On a $d^{+}(A)$ est la somme des termes de la première ligne de la matrice associée au graphe (G). On a $d^{+}(A) = 2$ et la somme des termes de la première ligne de cette matrice est 3, ainsi cette matrice n'est pas celle associée au graphe (G).

Exercice 2

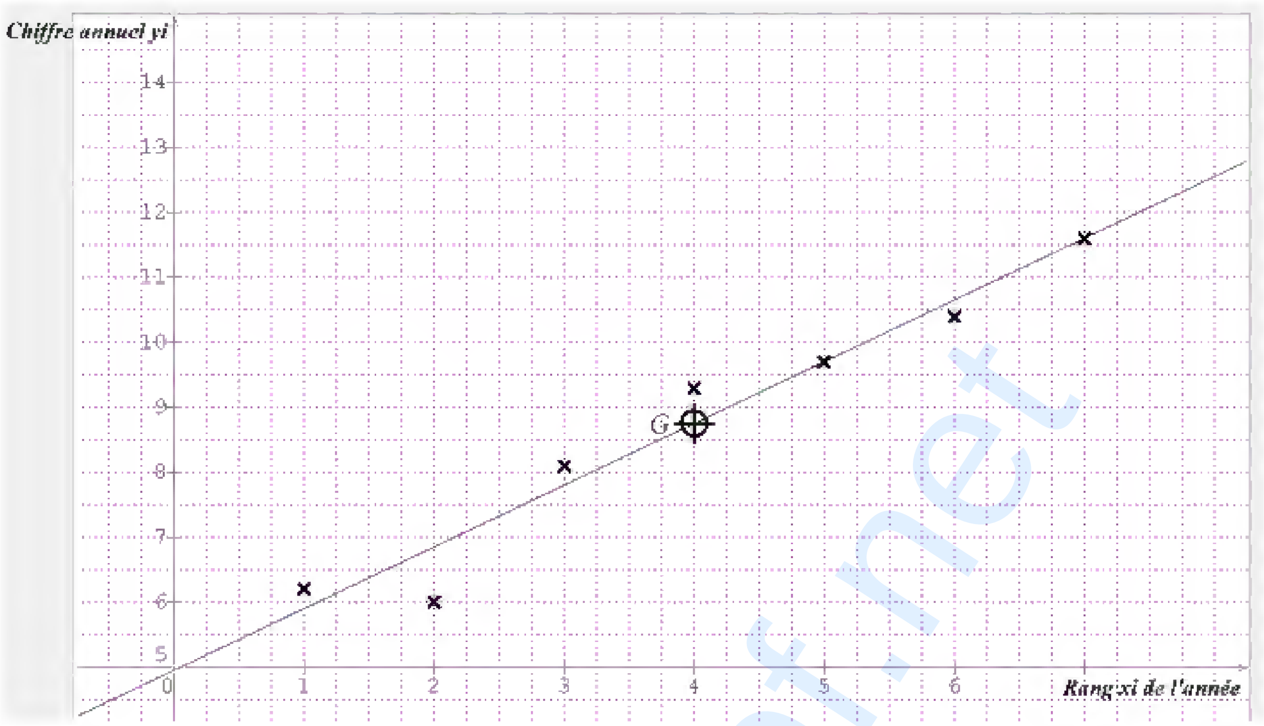
Année	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6	7
Chiffre annuel y_i (en milliards de dinars)	6,2	6	8 ,1	9,3	9,7	10,4	11,6

(Source : I N S)

1) Le nuage de points : Voir figure.

2) $G(\overline{x}, \overline{y})$; où $\overline{x}$ et $\overline{y}$ sont respectivement les moyennes arithmétiques des x_i et y_i.

$G(4\,;\ 8{,}76)$.



3) Le nuage des points est allongé suivant une droite, donc un ajustement affine est envisagé.

4)a) Une équation de la droite de régression de y en x : $y = 0{,}95\,x + 4{,}96$.

b) Le rang de l'année 2017 est $x = 10$, d'où $y = 0{,}95 \times 10 + 4{,}96 = 14{,}46$.

Ainsi le chiffre d'exportation de la Tunisie des produits électriques et mécaniques en l'année 2017 est estimé à $14{,}46$ milliards de dinars.

Exercice 3

1)a) $A = \begin{pmatrix} 25 & 12 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 25 & 12 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 25 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 4 \times \begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 25 \times (3-2) - 4 \times (12-8) + (12 \times 2 - 3 \times 8)$$

$$= 25 - 16 + 0 = 9.$$

b) $\det(A) \neq 0$, d'où A est inversible.

2) $B=\begin{pmatrix}1 & -4 & 0\\ -2 & 17 & -18\\ 1 & -13 & 27\end{pmatrix}$

$$A\times B=\begin{pmatrix}25 & 12 & 8\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & -4 & 0\\ -2 & 17 & -18\\ 1 & -13 & 27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}=9.\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=9.I_3$$

$$A\times B=9.I_3 \Leftrightarrow A\times\left(\frac{1}{9}.B\right)=I_3 \Leftrightarrow A^{-1}=\frac{1}{9}.B$$

3)a) On note :

- x le nombre de jouets fabriqués de type voiture ;
- y le nombre de jouets fabriqués de type camion ;
- z le nombre de jouets fabriqués de type bateau.

Le nombre de jouets fabriqués est $x+y+z=76$.

Le nombre d'heures de travail est $4x+3y+2z=204$.

La quantité utilisée de bois (en Kg) est $2,5x+1,2\,y+0,8\,z=96$.

Ainsi la situation est traduite par le système suivant :

$$(S):\begin{cases}2,5x+1,2\,y+0,8\,z=96\\ 4x+3y+2z=204\\ x+y+z=76\end{cases}$$

b) $$(S):\begin{cases}2,5x+1,2\,y+0,8\,z=96\\ 4x+3y+2z=204\\ x+y+z=76\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}25x+12\,y+8\,z=960\\ 4x+3y+2z=204\\ x+y+z=76\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}25 & 12 & 8\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}960\\ 204\\ 76\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A\times U=V$$

c) $$A\times U=V\Leftrightarrow\left(\frac{1}{9}.B\right)A\times U=\left(\frac{1}{9}.B\right)\times V$$

$$\Leftrightarrow U=\left(\frac{1}{9}.B\right)\times V$$

$$\Leftrightarrow U=\frac{1}{9}.\begin{pmatrix}1 & -4 & 0\\ -2 & 17 & -18\\ 1 & -13 & 27\end{pmatrix}\begin{pmatrix}960\\ 204\\ 76\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow U=\frac{1}{9}.\begin{pmatrix}144\\ 180\\ 360\end{pmatrix}\Leftrightarrow U=\begin{pmatrix}16\\ 20\\ 40\end{pmatrix}.$$

Ainsi l'artisan a fabriqué 16 voitures, 20 camions et 40 bateaux.

Exercice 4

$f(x)=x-1-\ln x$; $x\in$ 0, $+\infty$.

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x-1-\ln x=+\infty$, car $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

D'où la droite d'équation $x=0$ est asymptote oblique pour la courbe (C).

2)a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-1-\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty} x(1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x})=+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1-\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty} -1-\ln x=-\infty$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=-\infty$, d'où la courbe (C) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=x$.

3)a) $f(x)=x-1-\ln x$; $x\in$ 0, $+\infty$. $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$; $x\in$ 0, $+\infty$.

b) $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x}=0$; $x\in$ 0, $+\infty$

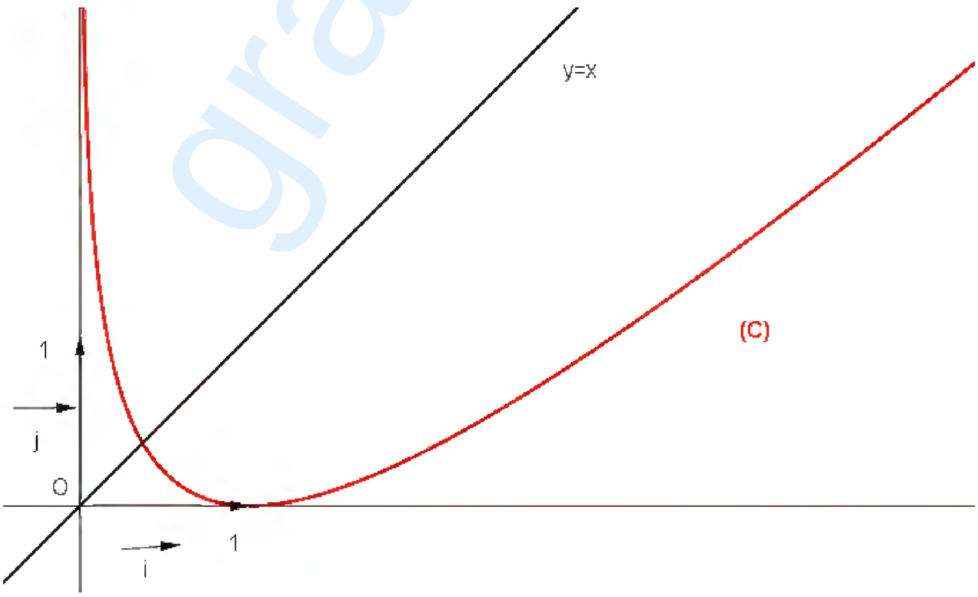
$\Leftrightarrow x=1$

$f(1)=0$.

Le tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4) La courbe (C) de f :



5) $g(x) = x\ln x$; $x \in 0, +\infty$.

a) $g'(x) = x\ln x \,' = \ln x + x\dfrac{1}{x} = 1 + \ln x$; $x \in 0, +\infty$.

b) A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

$$A = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e x - 1 - \ln x \;\, dx = \int_1^e x - g'(x) \;\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - g(x)\right]_1^e$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^2 - g(e)\right) - \left(\frac{1}{2} - g(1)\right) = \frac{1}{2}e^2 - e - \frac{1}{2} \text{ u.a.}$$