

**Problème 11 points**

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies dans  $]0 ; +\infty[$  respectivement par  $f(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x - 2 \ln x + \frac{1}{2} x^2$ ,  $g(x) = x^2 + \ln x - 2$  et on désigne par (C) la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**PARTIE A : 5,5 points**

1. a. Calculer  $g'(x)$  et en déduire que  $g$  est une bijection de  $]0 ; +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$ . **1pt**
- b. Justifier qu'il existe un unique réel  $\alpha \in [1,3 ; 1,35]$  tel que  $g(\alpha) = 0$ . **0,75pt**
- c. Vérifier que dans  $[1,3 ; 1,35]$ ,  $g(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2 - \ln x} = x$ . **0,5pt**
2. Soit  $k$  la fonction définie dans  $[1,3 ; 1,35]$  par  $k(x) = \sqrt{2 - \ln x}$ ;
  - a. Déterminer le sens de variation de  $u : x \mapsto \sqrt{x}$  et  $v : x \mapsto 2 - \ln x$  et en déduire que  $k$  est décroissante. **0,75pt**
  - b. Justifier que pour tout réel  $x \in [1,3 ; 1,35]$ ,  $k(x) \in [1,3 ; 1,35]$ . **0,75pt**
3. On admet que pour tout réel  $x \in [1,3 ; 1,35]$ ,  $|k'(x)| \leq \frac{1}{3}$ .  
Soit  $(U_n)$  la suite définie par  $U_0 = 1,3$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_{n+1} = k(U_n)$ .
  - a. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3} |U_n - \alpha|$ . **0,75pt**
  - b. En déduire que  $|U_n - \alpha| \leq 0,05 \left(\frac{1}{3}\right)^n$  pour tout entier naturel  $n$  et donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près. **1pt**

**PARTIE B : 5,5 points.**

1. Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition. **0,5pt**  
Calculer  $f'(x)$  et vérifier que pour tout réel  $x > 0$ ,  $xf'(x) = g(x)$ . **0,75pt**
2. En déduire que  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \alpha$ . **0,5pt**
3. Dresser le tableau de variation de  $f$ . **0,75pt**
4. i) Montrer que  $f(\alpha) = \frac{\alpha^4 + \alpha^2 - 4}{2}$ . **0,5pt**  
ii) Représenter  $f$  dans un repère orthonormé. On prendra  $\alpha$  égal à sa valeur approchée trouvée plus haut et on prendra  $f(\alpha) = 0,3$ . (unité d'axes : 1,5 cm). **1,5pt**
5. Justifier que la fonction  $F : x \mapsto \frac{1}{2} x \ln^2 x - 3x \ln x + \frac{1}{6} x^3 + 3x + 1$  est une primitive de  $f$ . **0,5pt**
6. En déduire l'aire en  $\text{cm}^2$  de la portion plane constituée des points  $M(x ; y)$  tels que  $1 \leq x \leq \alpha$  et  $0 \leq y \leq f(x)$ . **0,5pt**

$\frac{1}{2} \ln^2$   
 $3x \ln$

DMG

*AP 2010*

*DMG*

**Cette épreuve est un sujet d'entraînement gratuitement mis à la disposition des candidats au Baccalauréat D 2010 par le Ministère des Enseignements Secondaires.**

**ÉPREUVE ZÉRO DE MATHÉMATIQUES 2010****NIVEAU : TLE D ;****DURÉE : 4 HEURES****Exercice 1. 5 points**

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ .

1.i) Montrer qu'il existe un unique réel  $a$  tel que  $a^2 - (1 + i\sqrt{3})a + i\sqrt{3} = 0$  dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes. **0,75pt**

ii) En utilisant le réel trouvé, déduire l'autre solution de l'équation  $z^2 - (1 + i\sqrt{3})z + i\sqrt{3} = 0$  dans  $\mathbb{C}$ . **0,5pt**

2. Déterminer les complexes  $a, b$  et  $c$  tels que  $z^3 - i\sqrt{3}z^2 - z + i\sqrt{3} = (z + 1)(az^2 + bz + c)$  et en déduire les solutions de l'équation (E) :  $z^3 - i\sqrt{3}z^2 - z + i\sqrt{3} = 0$  dans  $\mathbb{C}$ . **1,25pt**

3. On désigne par A, B et C les points images respectifs des complexes  $1; -1$  et  $i\sqrt{3}$ . S est la similitude plane directe qui transforme A en B et B en C.

i) Donner l'écriture complexe de S et en déduire que S est une rotation que l'on caractérisera. **1,25pt**

ii) Soit  $\Omega$  le centre de cette rotation, en utilisant  $\Omega$ , déterminer l'ensemble des points M de  $\mathbb{C}$  tels que  $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 0$ . **1,25pt**

**Exercice 2. 4 points**

La région est constituée de 40% de femmes et 60% d'hommes. 45% des hommes de cette région fument ainsi que 20% des femmes. On choisit une personne au hasard dans cette région.

i) Montrer que la probabilité  $p$  de choisir un fumeur est  $p = \frac{13}{20}$ . **1pt**

ii) Quelle est la probabilité d'avoir une femme sachant que la personne choisie fume. **1pt**

2. On s'est intéressé à la durée hebdomadaire au travail des personnes de cette région et l'enquête étalée sur 12 semaines a conduit aux résultats suivants :

semaine ( $x_i$ )	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
durée moyenne en heure ( $y_i$ )	40,7	40,67	40,68	40,68	40,6	40,54	40,49	40,45	40,33	40,29	40,24	40,16

On admet que la covariance de la série  $(x, y)$  est  $\text{cov}(x, y) = -0,616$ , les variances respectives en  $x$  et  $y$  sont  $V(x) = 11,916$  et  $V(y) = 0,033$ .

i) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre  $x$  et  $y$  et l'interpréter. **0,75pt**

ii) Déterminer une équation de la droite de régression de  $y$  en  $x$  et estimer à  $10^{-2}$  près la durée moyenne de travail qu'on aurait à la 20<sup>e</sup> semaine. **1,25pt**