Mathématiques
Sciences de l'informatique
Corrigé de la session principale Juin 2013

Exercice 1

1) $z^2 - 2(2-i)z + 7 - 4i = 0.$

$\Delta' = [-(2-i)]^2 - (7-4i) = (4-4i-1) - (7-4i) = -4 = (2i)^2.$

$z_1 = 2-i-2i = 2-3i \ ; \ z_2 = 2-i+2i = 2+i.$

2) $P(z) = z^3 - (2-3i)z^2 - (3+4i)z + 18 - i \ ; \ z \in \mathbb{C}.$

a) $(z+2+i)\left[z^2 - 2(2-i)z + 7 - 4i\right]$

$= z^3 - 2(2-i)z^2 + (7-4i)z + (2+i)\left[z^2 - 2(2-i)z + 7 - 4i\right]$

$= z^3 + [-2(2-i) + (2+i)]z^2 + [(7-4i) - 2(2+i)(2-i)]z + (2+i)(7-4i)$

$= z^3 + [-2(2-i) + (2+i)]z^2 + [(7-4i) - 2(2+i)(2-i)]z + (2+i)(7-4i)$

$= z^3 - (2-3i)z^2 - (3+4i)z + 18 - i = P(z).$

D'où $P(z) = (z+2+i)\left[z^2 - 2(2-i)z + 7 - 4i\right]$

b) $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z+2+i)\left[z^2 - 2(2-i)z + 7 - 4i\right] = 0$

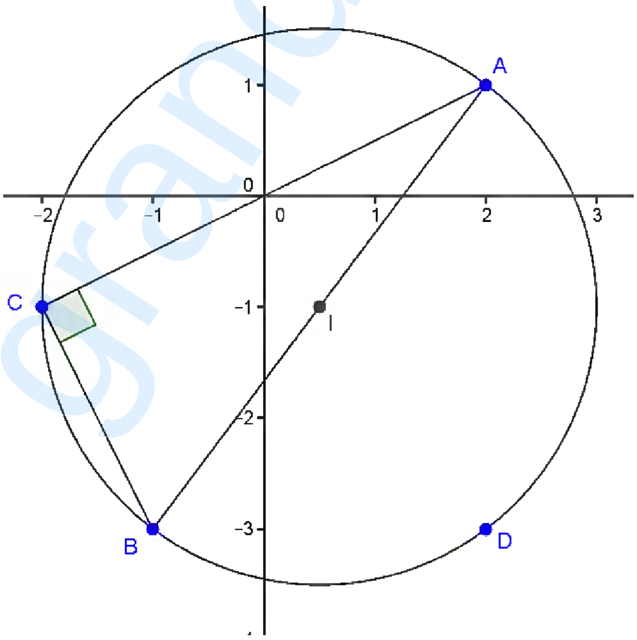
$\Leftrightarrow z+2+i = 0$ ou $z^2 - 2(2-i)z + 7 - 4i = 0$

$\Leftrightarrow z = -2-i$ ou $z = 2-3i$ ou $z = 2+i.$

$S_{\mathbb{C}} = \{-2-i, 2-3i, \ 2+i\}$

3) A, B, C et D les points d'affixes respectives $2+i$, $-1-3i$, $-2-i$ et $2-3i$.

a)



b) On a : $\overrightarrow{AC}(-4-2i)$, $\overrightarrow{BC}(-1+2i)$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = (-4)\times(-1)+(-2)\times 2 = 0$. D'où les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux et par conséquent le triangle ABC est rectangle en C.

c) Le triangle ABC est rectangle en C, d'où il est inscrit dans le cercle de diamètre [AB].

$\overrightarrow{AD}(-4i)$, $\overrightarrow{BD}(3)$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BD} = 0$. D'où les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux et par conséquent le triangle ABD est rectangle en D. Ainsi D appartient au cercle de diamètre [AB].

Soit I le milieu du segment [AB], $I(\frac{1}{2}-i)$. $AB = \sqrt{(-1-2)^2+(-3-1)^2} = \sqrt{9+16} = 5$.

Les points A, B, C et D sont sur le cercle de centre $I(\frac{1}{2}, -1)$ et de rayon 5.

Exercice 2

Dans un lycée, on a les données suivantes :

- 52% des élèves sont des filles.
- 20% des élèves suivent la spécialité informatique.
- 12% des élèves sont des filles qui suivent la spécialité informatique.

On choisit au hasard un élève de ce lycée.

On considère les évènements suivants :

F : « L'élève choisi est une fille ».

I : « L'élève choisi suit la spécialité informatique ».

1)a) Dans ce lycée, 52% des élèves sont des filles alors la probabilité que l'élève choisi soit une fille est $p(F) = \frac{52}{100} = \frac{13}{25}$.

20% des élèves de ce lycée suivent la spécialité informatique alors la probabilité que l'élève choisi suit la spécialité informatique est $p(I) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$.

12% des élèves sont des filles qui suivent la spécialité informatique alors la probabilité que l'élève choisi soit une fille qui suit la spécialité informatique est $p(F\cap I) = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$.

b) L'élève choisi est une fille. La probabilité qu'elle suit la spécialité informatique est

$$p(I/F) = \frac{p(F\cap I)}{p(F)} = \frac{\frac{3}{25}}{\frac{13}{25}} = \frac{3}{13}.$$

2)a) On sait que $p(I/\overline{F}) = \frac{p(I\cap\overline{F})}{p(\overline{F})}$.

$p(\overline{F}) = 1-p(F) = 1-\frac{13}{25} = \frac{12}{25}$.

D'autre part on a $p(I) = p(I \cap F) + p(I \cap \overline{F})$, d'où $p(I \cap \overline{F}) = p(I) - p(I \cap F)$.

$$p(I \cap \overline{F}) = p(I) - p(I \cap F) = \frac{1}{5} - \frac{3}{25} = \frac{2}{25}.$$

$$p(I / \overline{F}) = \frac{p(I \cap \overline{F})}{p(\overline{F})} = \frac{\frac{2}{25}}{\frac{12}{25}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

b) La probabilité que l'élève choisi soit un garçon qui ne suit pas la spécialité informatique est $p(\overline{I} \cap \overline{F})$.

$p(\overline{I} \cap \overline{F}) = p(\overline{F}).p(\overline{I} / \overline{F})$ or $p(\overline{I} / \overline{F}) = 1 - p(I / \overline{F}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

D'où $p(\overline{I} \cap \overline{F}) = p(\overline{F}).p(\overline{I} / \overline{F}) = \frac{12}{25} \times \frac{5}{6} = \frac{2}{5}$.

Exercice 3

1)a) Les courbes (C) et (Γ), représentées sont celles des deux fonctions $\ln : x \mapsto \ln x$ et $u : x \mapsto \frac{1}{x} - 1$, définies sur $]0\,;\ +\infty[$.

On a $\ln 2 > 0$ et $u(2) = -\frac{1}{2} < 0$. D'où la courbe (C) est celle de la fonction ln et la courbe (Γ) est celle de la fonction u.

b) Par une lecture graphique, on détermine la position relative des deux courbes (C) et (Γ) et cela permet d'établir le signe de $\ln x - u(x)$ sur $]0;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$\ln x - u(x)$		$-$	0	$+$	

2) f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = (x-1)\ln x$.

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x-1)\ln x = +\infty.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)\ln x = +\infty.$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x-1)\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \frac{1}{x})\ln x = +\infty.$

D'où la courbe C_f admet une branche parabolique de direction l'axe $(O\,;\ \vec{j})$.

c) $f(x) = (x-1)\ln x \quad ; \quad x \in]0\,;+\infty[$.

$$f'(x) = \ln x + (x-1).\frac{1}{x} \quad ; \quad x \in]0\,;+\infty[$$

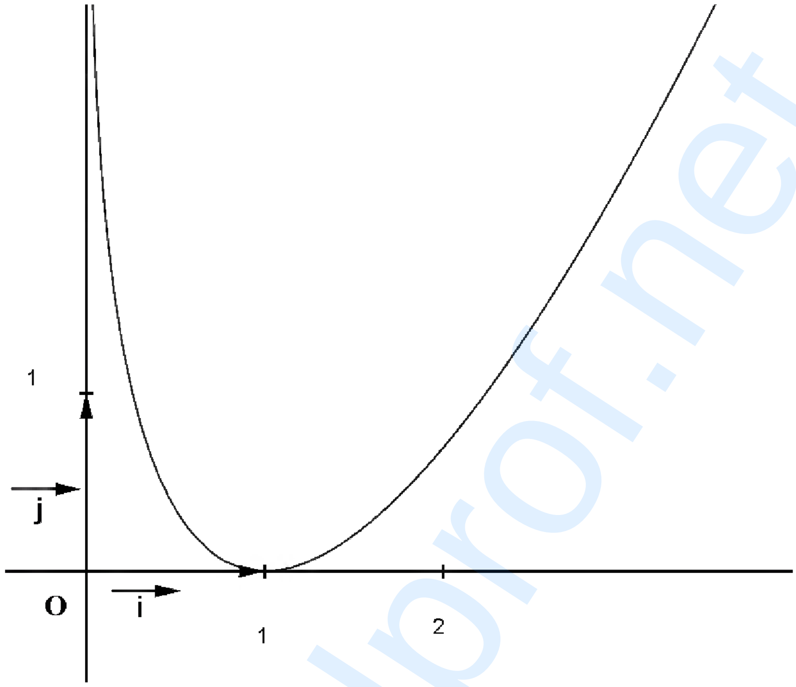
$$= \ln x + 1 - \frac{1}{x}$$

$$= \ln x - u(x)$$

d) Le tableau de variation de la fonction f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

3) La courbe C_f .



4) **A** $= \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e (x-1)\ln x\,dx$

On pose : $u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \dfrac{1}{x}$

$v'(x) = x - 1 \Rightarrow v(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x$

En appliquant la formule d'intégration par parties on a :

$$\int_1^e (x-1)\ln x\,dx = \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\ln x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x}{2} - 1\right)dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - e - \left[\frac{1}{4}x^2 - x\right]_1^e$$

$$= \frac{e^2}{2} - e - \left(\frac{e^2}{4} - e - \frac{1}{4} + 1\right)$$

$$= \frac{e^2 - 3}{4}$$

D'où **A** $= \dfrac{e^2 - 3}{4}$ unité d'aire.

Exercice 4

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $2x-3y=1$.

a) Soit $(x\,;\,y)$ une solution de (E) alors le couple $(x\,;\,y)$ vérifie $2x-3y=1$, d'où d'après le théorème de Bézout x et y sont premiers entre eux.

b) $2\times(-1)-3\times(-1)=1$, d'où $(-1\,;-1)$ est une solution de (E).

c) $(x\,;\,y)$ est une solution de l'équation (E) $\Leftrightarrow 2x-3y=1$

$$\Leftrightarrow 2x-3y=2\times(-1)-3\times(-1)$$
$$\Leftrightarrow 2(x+1)-3(y+1)=0$$
$$\Leftrightarrow 2(x+1)=3(y+1)$$

On a 2 divise $3(y+1)$ et 2 et 3 sont premiers entre eux, donc d'après le lemme de Gauss 2 divise $y+1$. D'où $y+1=2k,\ k\in\mathbb{Z}$.

$y+1=2k,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow y=2k-1,\ k\in\mathbb{Z}$.

On remplace y par sa valeur dans l'équation (E) et on tire x en fonction de k :

$$2x-3(2k-1)=1 \Leftrightarrow 2x=3(2k-1)+1$$
$$\Leftrightarrow x=3k-1$$

On vérifie que $(3k-1;2k-1)$ est solution de (E) : $2(3k-1)-3(2k-1)=1$.

$S_{\mathbb{Z}^2}=\{(3k-1;2k-1),\ k\in\mathbb{Z}\}$.

2) Pour tous entiers m et n, on définit la matrice $A=\begin{pmatrix} m-2 & n-1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) $\det(A)=2(m-2)-3(n-1)=2m-3n-1$.

b) A n'est pas inversible $\Leftrightarrow \det(A)=0$

$$\Leftrightarrow 2m-3n=1$$
$$\Leftrightarrow (m;n) \text{ est une solution de l'équation (E)}$$
$$\Leftrightarrow (m;n)\in\{(3k-1;2k-1),\ k\in\mathbb{Z}\}.$$

c) On a $13\equiv 1[3]$ d'où $13^{2013}\equiv 1[3]$, d'autre part $2011\equiv 1[3]$ alors $2011\times 13^{2013}\equiv 1[3]$.

De même $11\equiv 2[3]$ d'où $11^{2012}\equiv 2^{2012}[3]\equiv (2^2)^{1006}[3]\equiv 1^{1006}[3]\equiv 1[3]$.

D'autre part $2015\equiv 2[3]$ alors $2015\times 11^{2012}\equiv 2[3]$.

Ainsi $2011\times 13^{2013}\equiv 1[3]$ et $2015\times 11^{2012}\equiv 2[3]$

d) On pose $m=2011\times 13^{2013}+2$ et $n=2015\times 11^{2012}+1$.

On a : $m\equiv 0[3]$ et $n\equiv 0[3]$, d'où les entiers m et n ne sont pas premiers entre eux puisqu'ils sont divisibles par 3 par conséquent le couple $(m;n)$ ne peut pas être une solution de l'équation (E) d'après 1)a).

Or $2011\times13^{2013}=m-2$ et $2015\times11^{2012}=n-1$.

D'où la matrice $B=\begin{pmatrix}2011\times13^{2013} & 2015\times11^{2012}\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m-2 & n-1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=A$

D'après 2)b) $(m;n)$ est une solution de l'équation (E) si et seulement si A n'est pas inversible.
Cela permet de dire que :

$(m;n)$ n'est pas une solution de l'équation (E) si et seulement si B est inversible.

On a $(m;n)$ n'est pas une solution de l'équation (E) d'où la matrice B est inversible.