Examen du baccalauréat **Session de contrôle**

Session de Juin 2016

Section : Sciences de l'informatique

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

Question	1)	2)	3)	4)
Réponse	a	b	b	b

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1+\frac{1}{n}) = \ln(1) = 0.$

2) On a : $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow 1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{n+1}$

$$\Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow U_n > U_{n+1}$$

3) $p(\overline{A}\cap\overline{B}) = p(\overline{A}).p(\overline{B}/\overline{A}) = 0{,}8\times0{,}6 = 0{,}48.$

4) $p(B) = p(A).p(B/A) + p(\overline{A}).p(B/\overline{A}) = 0{,}2\times0{,}3 + 0{,}8\times0{,}4 = 0{,}38.$

Exercice 2

1) $M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\alpha \in IR.$

a) $\det(M_\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0\times\begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \alpha\times\begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = -1-\alpha^3.$

b) M_α est inversible $\Leftrightarrow \det(M_\alpha) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \det(M_\alpha) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -1-\alpha^3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 + 1 \neq 0$$

$\alpha^3 + 1 = 0,\ \alpha \in IR \Leftrightarrow \alpha^3 = -1$

$$\Leftrightarrow \alpha = -1$$

Ainsi M_α est inversible si et seulement si $\alpha \in IR - \ \ -1$.

2)a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M_2\ (\alpha = 2)$; d'où la matrice A est inversible.

b) $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I_3$

c) $A \times B = 9\, I_3 \iff A \times \left(\frac{1}{9}B\right) = I_3$

$\iff \left(\frac{1}{9}A\right) \times B = I_3.$

D'où $A^{-1} = \frac{1}{9}B$ et $B^{-1} = \frac{1}{9}A.$

3)a) $(S): \begin{cases} x - 2y + 4z = 3 \\ -2x + 4y + z = 3 \\ 4x + y - 2z = 6 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \iff B \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $(S) \iff B \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\iff \frac{1}{9}A \times B \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{9}A \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\iff I_3 \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \times \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \\ y = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \\ z = 1 \end{cases}$

Exercice 3

A) $f(x) = e^x - 1;\ x \in IR.$

1) $f(x) = e^x - 1;\ x \in IR.\ f'(x) = e^x\ ;\ x \in IR.$

Δ la tangente à (C) au point O.

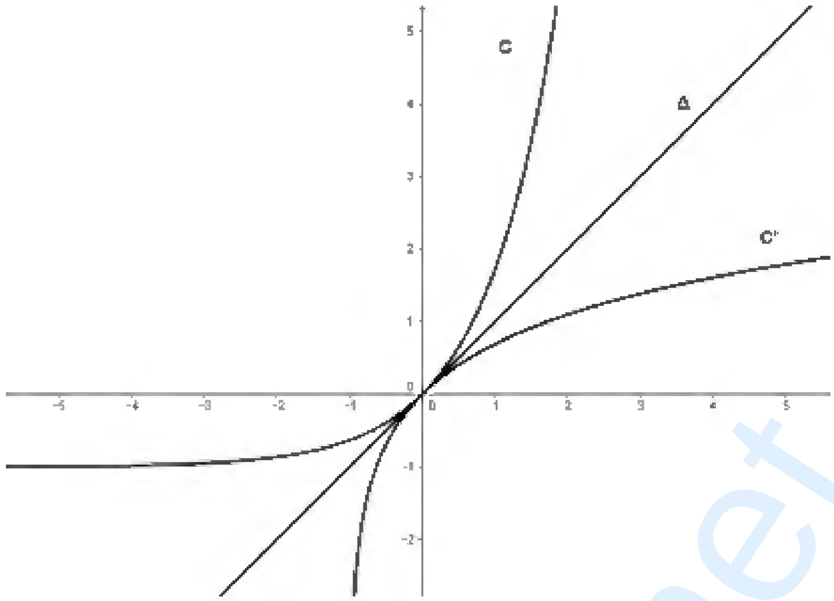
2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x - 1 = -1$, car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x - 1 = +\infty.$

$f'(x) = e^x > 0$; pour tout $x \in IR$, d'où f est strictement croissante sur IR.

f est continue et strictement croissante sur IR, d'où f réalise une bijection de IR sur $f(IR) = \ -1, +\infty\ .\ I = \ -1, +\infty\ .$

3) La courbe C' de f^{-1}.



4) Soit Soit $x \in IR$ et $y \in -1, +\infty$.

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = e^{x} - 1$$
$$\Leftrightarrow e^{x} = y + 1$$
$$\Leftrightarrow x = \ln(y+1).$$

D'où $f^{-1}(x) = \ln(x+1)$, $x \in -1, +\infty$.

B) $g(x) = e^{x} - 1 + \dfrac{1}{e^{x}+1}$; $x \in IR.$

1)a) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} - 1 + \dfrac{1}{e^{x}+1} = 0$, car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0.$

D'où l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe (Γ) de g au voisinage de (-∞).

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} - 1 + \dfrac{1}{e^{x}+1} = +\infty.$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x(e^{x}+1)} = +\infty.$$

D'où la courbe (Γ) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de (+∞).

2)a) $f(x) - g(x) = -\dfrac{1}{e^{x}+1} < 0$; pour tout $x \in IR.$

D'où la courbe (Γ) est au-dessus de la courbe (C).

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{e^{x}+1} = 0.$

3)a) $g(x) = e^{x} - 1 + \dfrac{1}{e^{x}+1}$; $x \in IR.$

$$g'(x) = \left(e^x - 1 + \frac{1}{e^x+1}\right)' = e^x - \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

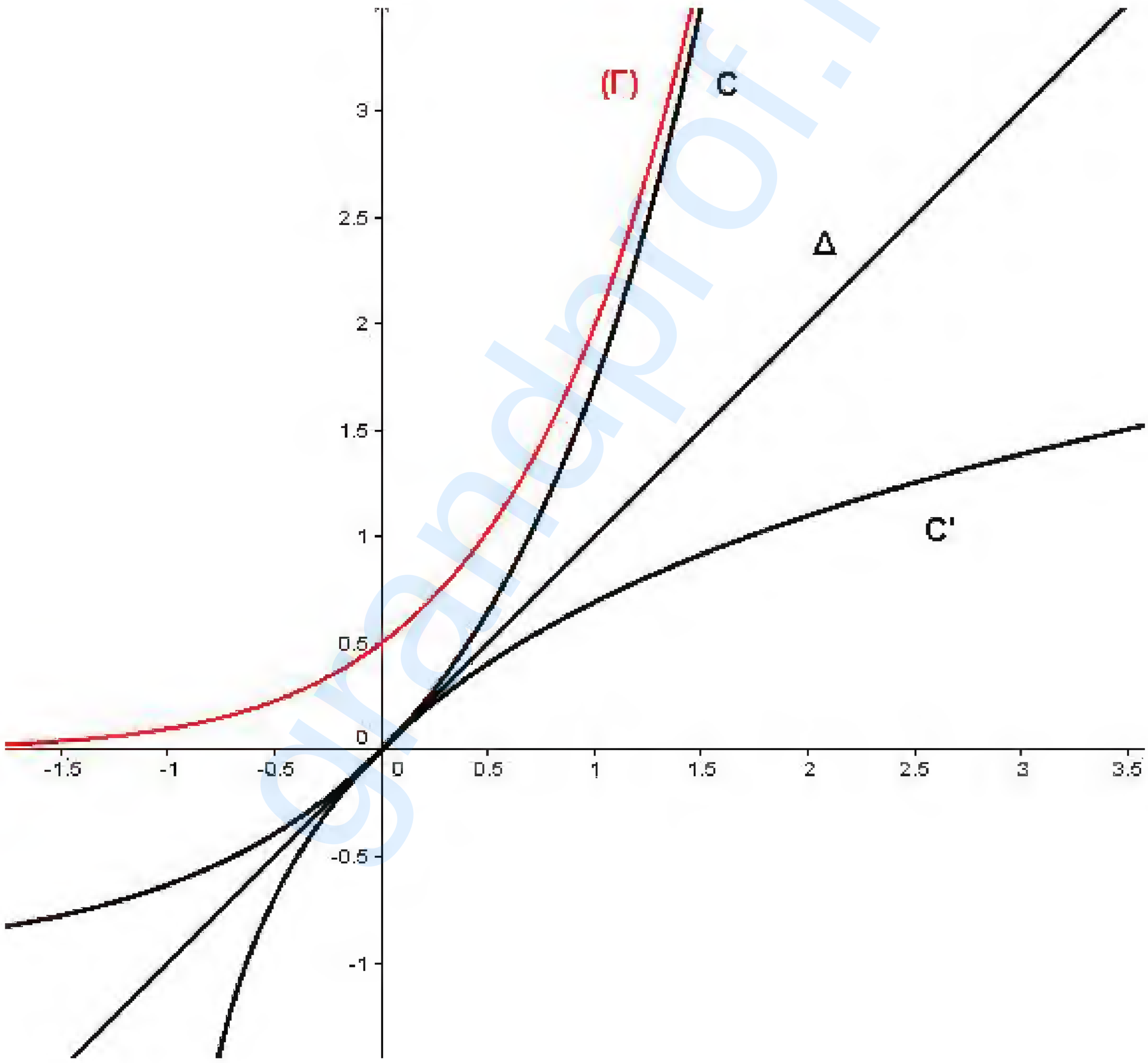
$$= \frac{e^x(e^{2x}+2e^x+1) - e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x(e^{2x}+2e^x)}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}(e^x+2)}{(e^x+1)^2}$$

D'où $g'(x) = \dfrac{e^{2x}(e^x+2)}{(e^x+1)^2}$; pour tout $x \in IR$.

b) On a $g'(x) = \dfrac{e^{2x}(e^x+2)}{(e^x+1)^2} > 0$; pour tout $x \in IR$.

x	$-\infty$		$+\infty$
g'(x)		+	
g	0	↗	$+\infty$

c) $g(0) = \dfrac{1}{2}$.



4)a) $e^x - \dfrac{e^x}{e^x+1} = e^x - \dfrac{e^x+1-1}{e^x+1} = e^x - 1 + \dfrac{1}{e^x+1} = g(x)$

D'où $g(x) = e^x - \dfrac{e^x}{e^x+1}$; pour tout $x \in IR$.

b) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

$$A=\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1\left(e^x-\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx=\left[e^x-\ln(e^x+1)\right]_0^1$$

$$= e-\ln(e+1) - 1-\ln 2 = e-1+\ln\left(\frac{2}{e+1}\right) \text{ u.a.}$$

Exercice 4

1) $(E): 11x-7y=4.$

a) $(E): 11\times1-7\times1=4,$ d'où le couple $(1,1)$ est une solution de (E).

b) $(E): 11x-7y=4=11\times1-7\times1 \Leftrightarrow 11(x-1)-7(y-1)=0$

$$\Leftrightarrow 11(x-1)=7(y-1)$$

$$\left.\begin{array}{r}11/7(y-1)\\ 11\wedge 7=1\end{array}\right\}\Rightarrow 11/y-1$$

$$\Rightarrow y-1=11k\;;\;k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow y=11k+1\;;\;k\in\mathbb{Z}$$

$$11x-7y=4\Rightarrow 11x-7(11k+1)=4$$

$$\Rightarrow 11x=7(11k+1)+4$$

$$\Rightarrow 11x=7\times11k+11$$

$$\Rightarrow x=7k+1\;\;;\;k\in\mathbb{Z}$$

D'où $S=\;\; 7k+1,11k+1\;\;;\;k\in\mathbb{Z}$

2)a) $90=8\times11+2\equiv 2\;\;11\;;\;90=12\times7+6\equiv 6\;\;7$ d'où $90\in G$.

b) Soit $n\in G$ et (p,q) le couple d'entiers relatifs vérifiant $\begin{cases}n=11p+2\\ n=7q+6\end{cases}$.

$$n=11p+2=7q+6\Rightarrow 11p+2=7q+6$$

$$\Rightarrow 11p-7q=4$$

$\Rightarrow (p,q)$ est une solution de (E).

c) D'après b) on a montré que si n est un élément de G, alors $\begin{cases}n=11p+2\\ n=7q+6\end{cases}$ et (p,q) est une solution de (E).

On obtient donc $\begin{cases}n=11p+2\\ n=7q+6\end{cases}$ et $(p,q)=\;\;7k+1,11k+1\;\;;\;k\in\mathbb{Z}.$

$n=11p+2=11(7k+1)+2=77k+13.$

$n=77k+13\;\;\Rightarrow n\equiv 13\;\;77\;.$

Ainsi si n est un élément de G, alors $n\equiv 13\;\;77$.

3) Soit n un entier relatif tel que $n\equiv 13\;\;77$.

$$n \equiv 13\ \ 77 \ \Rightarrow n = 77k + 13 \ ; k \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow n = 11(7k+1) + 2 \ ; k \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow n \equiv 2\ \ 11$$
$$n \equiv 13\ \ 77 \ \Rightarrow n = 77k + 13 \ ; k \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow n = 7(11k+1) + 6 \ ; k \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow n \equiv 6\ \ 7$$

$n \equiv 2\ \ 11$ et $n \equiv 6\ \ 7$, d'où $n \in G$.

4) D'après ce qui précède un entier relatif n est un élément de G si et seulement si $n \equiv 13\ \ 77$.

Le plus petit élément de G supérieur à 2000, est le plus petit entier supérieur à 2000 et dont le reste de la division euclidienne par 77 est 13. Il suffit de voir les multiples de 77 supérieurs à 2000.

On a : $77 \times 25 = 1925$ et $77 \times 26 = 2002$.

D'où $77 \times 26 + 13 = 2015$ est le plus petit élément de G supérieur à 2000.