Examen du baccalauréat **Session principale**

Session de Juin 2016

Section : Sciences de l'informatique

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

1)a) $(3+i)^2 = 3^2 + 6i + i^2 = 9 + 6i - 1 = 8 + 6i.$

b) $(E_1) : z^2 - (1+5i)z - 8 + i = 0.$

$$\Delta = (1+5i)^2 - 4\times(-8+i)$$
$$= 1 + 10i - 25 + 32 - 4i$$
$$= 8 + 6i = (3+i)^2$$
$$z_1 = \frac{1+5i-(3+i)}{2} = -1+2i$$
$$z_2 = \frac{1+5i+(3+i)}{2} = 2+3i$$

$S = \ -1+2i,\ 2+3i$

2)a) $z^3 - (1+6i)z^2 + (-13+2i)z + 1 + 8i = (z-i)(z^2 + bz + c)$

$$\Leftrightarrow z^3 - (1+6i)z^2 + (-13+2i)z + 1 + 8i = z^3 + (b-i)z^2 + (c-ib)z - ic$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b - i = -(1+6i) \\ c - ib = -13 + 2i \\ -ic = 1 + 8i \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 - 5i \\ c = -8 + i \end{cases}$$

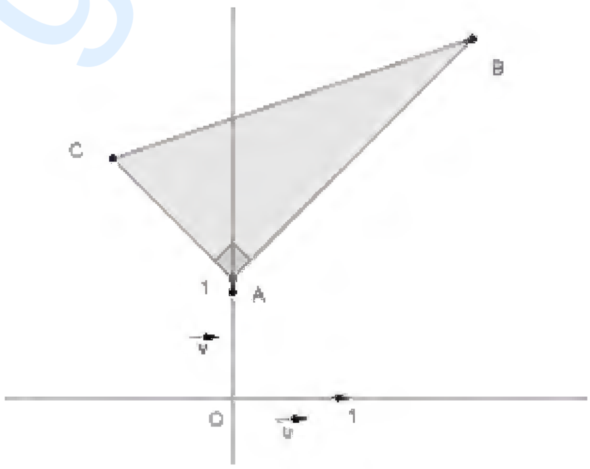
Ainsi $z^3 - (1+6i)z^2 + (-13+2i)z + 1 + 8i = (z-i)\left[z^2 - (1+5i)z - 8 + i\right]$

b) $(E_2) : z^3 - (1+6i)z^2 + (-13+2i)z + 1 + 8i = 0$

$$z^3 - (1+6i)z^2 + (-13+2i)z + 1 + 8i = 0 \Leftrightarrow (z-i)\left[z^2 - (1+5i)z - 8 + i\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow z - i = 0 \ \text{ ou } \ z^2 - (1+5i)z - 8 + i = 0$$
$$\Leftrightarrow z = i \text{ ou } z = -1+2i \text{ ou } z = 2+3i.$$

$S = \ i,\ -1+2i,\ 2+3i$

3)a) $z_A = i$, $z_B = -1+2i$ et $z_C = 2+3i$.



b) $AB^2 = |z_B - z_A|^2 = |2+2i|^2 = 2^2 + 2^2 = 8$

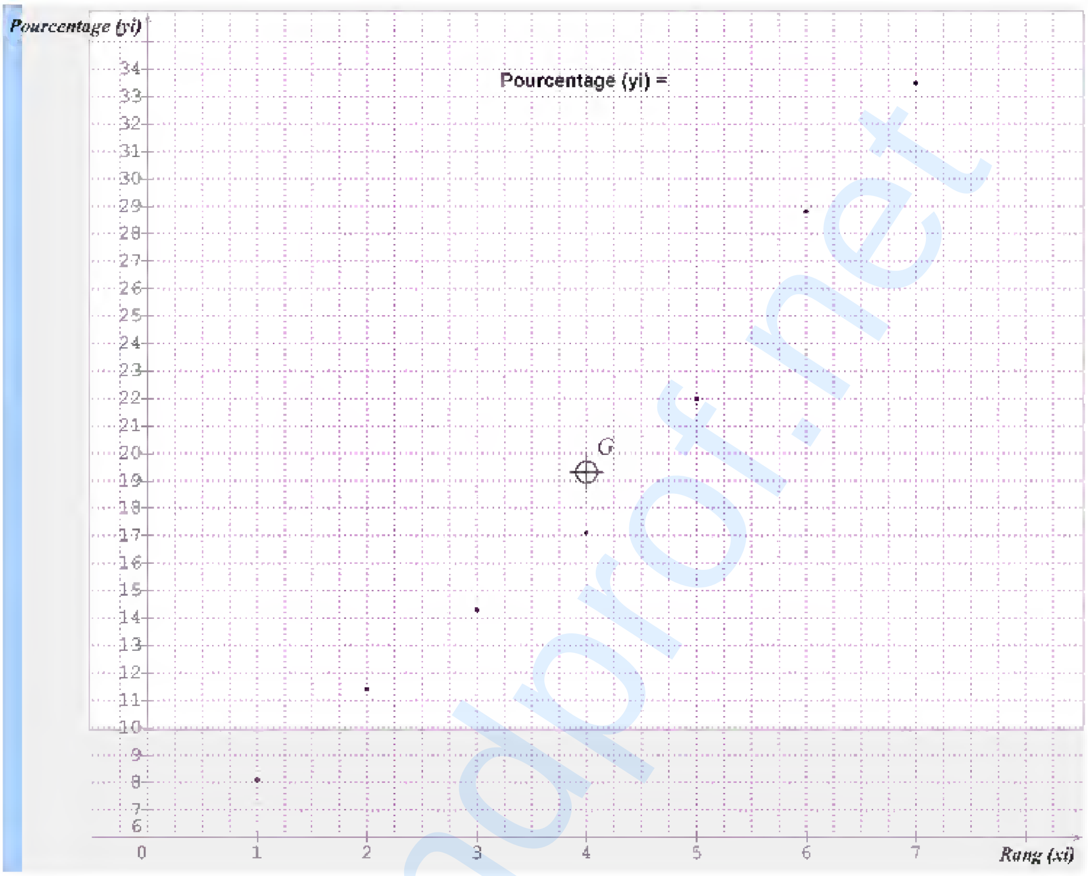
$AC^2 = |z_C - z_A|^2 = |-1+i|^2 = (-1)^2 + 1^2 = 2$

$BC^2 = |z_C - z_B|^2 = |-3-i|^2 = (-3)^2 + (-1)^2 = 10$

$BC^2 = AB^2 + AC^2$, d'où ABC est un triangle rectangle en A.

Exercice 2

1)a)



b) On peut remarquer que le nuage s'allonge suivant une droite, d'où un ajustement affine est justifié.

c) $G(\overline{x}\,;\overline{y})$; où $\overline{x}$ et $\overline{y}$ sont les moyennes arithmétiques respectives des x_i et y_i.
$G(4\,;19,31)$.

2)a) L'équation de la droite de régression de y en x est : $y = 4,23x + 2,35$.

b) 2018 est de rang $x = 10$, donc on peut estimer le pourcentage des ménages abonnés à Internet en Tunisie en 2018 : $y = 4,23 \times 10 + 2,35 = 44,65$.

c) On ne sait pas si la tendance restera la même ou non, donc on ne peut pas estimer le pourcentage des ménages abonnés à Internet en Tunisie en 2032, en utilisant cet ajustement. D'ailleurs si on suppose que la tendance restera la même et on applique cet ajustement on va trouver des pourcentages qui ne sont pas acceptables :

Le rang de l'année 2032 est $x = 24$ et on aura $y = 4,23 \times 24 + 2,35 = 103,87$.

Exercice 3

I]1)a) Par une lecture graphique $g(1) = -1$ et $g'(1) = 2$.

b) Le signe de g :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	

2) $g(x) = a + b\ \ln x\ ;\ x \in 0,\ +\infty$

$g'(x) = \dfrac{b}{x};\ x \in 0,\ +\infty$

$g(1) = -1 \Rightarrow a = -1$

$g'(1) = 2\ \Rightarrow b = 2$

D'où $g(x) = -1 + 2\ \ln x\quad ;\ x \in 0,\ +\infty$.

II] $f(x) = \dfrac{-1-2\ln x}{x}\quad ;\quad x \in 0,\ +\infty$

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1-2\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x} - 2\dfrac{\ln x}{x} = 0.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, d'où la courbe (C_f) admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale au voisinage de $(+\infty)$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-1-2\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} -\dfrac{1}{x}\ 1 + 2\ln x\ = +\infty.$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, d'où la courbe (C_f) admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

2)a) $f(x) = \dfrac{-1-2\ln x}{x}\quad ;\quad x \in 0,\ +\infty$

$$f'(x) = \frac{-1-2\ln x\ '\ x - \ -1-2\ln x}{x^2}$$

$$= \frac{-\frac{2}{x}x + 1 + 2\ln x}{x^2} = \frac{-1+2\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2},\quad x > 0.$$

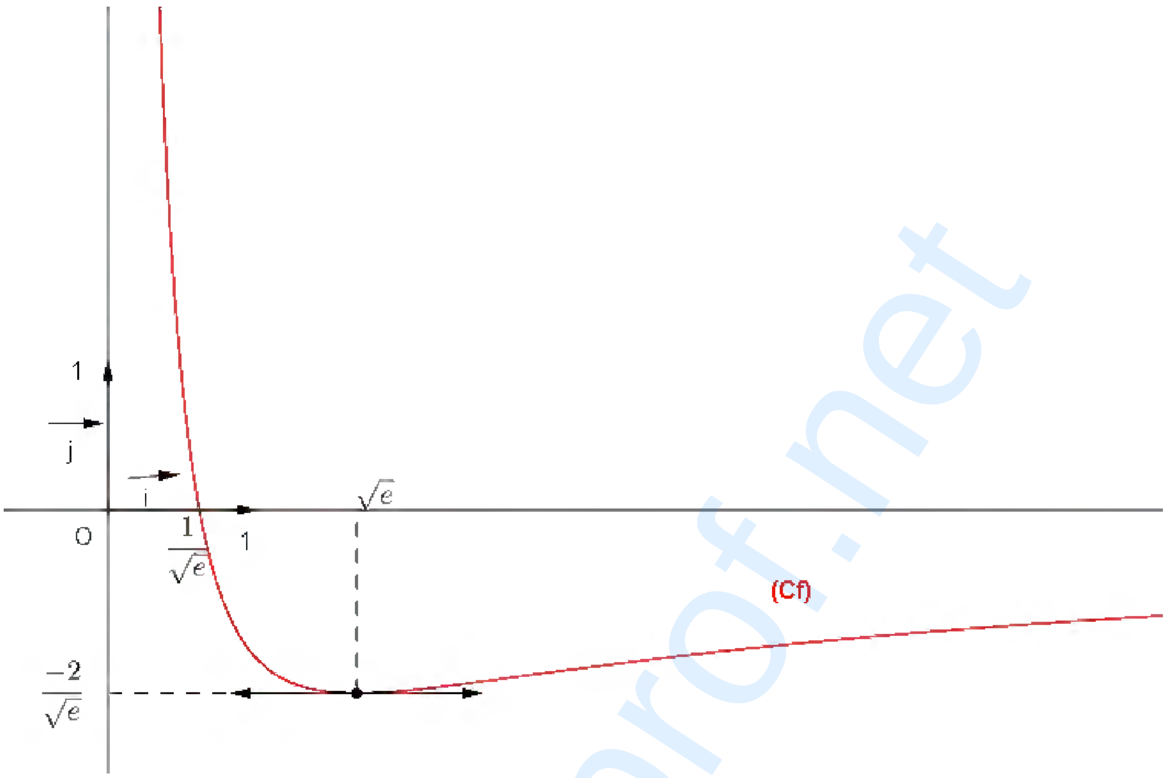
b) $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$, pour tout $x > 0$.

Le signe de f' est celui de g.

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	|| $+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{2}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	0

c) $f(\frac{1}{\sqrt{e}}) = \dfrac{-1-2\ln\frac{1}{\sqrt{e}}}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \sqrt{e}\ -1+2\ln\sqrt{e}\ = \sqrt{e}\ -1+\ln e\ = 0.$

d) La courbe (C_f) :



3)a) $\int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}} \frac{1}{x}\ln x\,dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}} = \frac{1}{2}(\ln\sqrt{e})^2 - \frac{1}{2}(\ln\frac{1}{\sqrt{e}})^2 = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 0.$

b) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe des ordonnées et les droites d'équations $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ et $x = \sqrt{e}$.

$$A = \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}} -f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}} \frac{1+2\ln x}{x}\,dx$$

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{x}+2\frac{\ln x}{x}\right)dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}} \frac{1}{x}\,dx + 2\int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}} \left(\frac{\ln x}{x}\right)dx$$

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}} \frac{1}{x}\,dx = \ln x\,\Big|_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}} = \ln\sqrt{e} - \ln\frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1\ \text{u.a.}$$

Exercice 4

$$(U_n):\begin{cases} U_0 = 13 \\ U_{n+1} = 5U_n - 2\ ;\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1)a) $U_1 = 5U_0 - 2 = 5 \times 13 - 2 = 63$

$U_2 = 5U_1 - 2 = 5 \times 63 - 2 = 313$

$U_3 = 5U_2 - 2 = 5 \times 313 - 2 = 1563$

$U_4 = 5U_3 - 2 = 5 \times 1563 - 2 = 7813$

b) Il parait que les deux derniers chiffres de U_n sont 63 si n est impair et 13 si n est pair.

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n \equiv 13 \;\; 50$.

- $U_0 = 13 \equiv 13 \; 50$, d'où la proposition est vraie pour $n = 0$.
- Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que la proposition est vraie pour p, c'est-à-dire $U_p \equiv 13 \;\; 50$.
- Montrons que la proposition est vraie pour $p+1$.

$$U_p \equiv 13 \;\; 50 \Rightarrow 5U_p \equiv 65 \;\; 50$$
$$\Rightarrow 5U_p - 2 \equiv 63 \;\; 50$$
$$\Rightarrow U_{p+1} \equiv 13 \;\; 50$$

D'où la proposition est vraie pour $p+1$.

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence $U_n \equiv 13 \;\; 50$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) $U_n \equiv 13 \;\; 50$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$U_n = 50q + 13$; $q \in \mathbb{N}$.

- Si q est pair alors $U_n = 100k + 13$; $k \in \mathbb{N}$ et cela veut dire que les deux derniers chiffres de U_n sont 13.
- Si q est impair alors $U_n = 100k' + 63$; $k' \in \mathbb{N}$ et cela veut dire que les deux derniers chiffres de U_n sont 63.

2) On a $U_n = 50q + 13$; $q \in \mathbb{N}$ d'où U_n est toujours impair.

Soit d un diviseur commun de U_n et U_{n+1}.

On a d / U_n donc $d / 5U_n$

d / U_{n+1} et $d / 5U_n$, donc $d /\ U_{n+1} - 5U_n$, c'est à dire $d / (-2)$

donc $d = 1$ ou $d = 2$ or on sait que U_n est impair donc $d = 1$.

Par suite U_n et U_{n+1} sont premiers entre eux.