

| | | |
|--|---|-----------------|
| RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ●●●●● EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2017 | Épreuve : Mathématiques | |
| | Section : Sciences de l'informatique | |
| | Durée : 3h | Coefficient : 3 |
| | Session de contrôle | |

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3

Exercice 1 (4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1)
 - a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$
 - b) Montrer que la suite (u_n) est croissante
 - c) Montrer que la suite (u_n) est convergente

- 2) On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$
 - a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera sa raison
 - b) Exprimer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, v_n puis u_n en fonction de n
 - c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 2 (4 points)

La probabilité qu'un autobus parte à temps est 0,85 ; la probabilité qu'il parte à temps et arrive à temps est 0,75 et la probabilité qu'il arrive à temps est 0,78.

Soient P l'événement : "L'autobus part à temps"

et A l'événement : "L'autobus arrive à temps"

- 1) Déterminer la probabilité de chacun des événements P, A et $P \cap A$.
- 2) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
 - a) A_1 : « l'autobus arrive à temps sachant qu'il est parti à temps »
 - b) A_2 : « l'autobus ne parte pas à temps et arrive à temps »

3) Pour se rendre au travail le matin, un ouvrier empreinte l'autobus.

Quelle est la probabilité pour que cet ouvrier arrive en retard au plus une fois pendant les 6 jours de travail de la semaine ?

Exercice 3 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} e^{-x}$. Soit C sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 4 cm)

1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

b) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x}} e^{-x}$. Préciser le signe de f'

c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat obtenu

2) a) Dresser le tableau de variation de f

b) Construire C

3) On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \int_0^n f(t) dt$

a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante

b) Montrer que pour $t \geq 0$, $8t \leq (t+2)^2$

En déduire que pour $t \geq 0$, $\sqrt{t} \leq \frac{t+2}{2\sqrt{2}}$.

c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^n (t+2)e^{-t} dt$

b) Montrer alors que (u_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite à 10^{-1} près.

Exercice 4 (6 points)

1) On considère l'équation

$$(E_1) \quad 5x - 7y = 3, \quad \text{où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs}$$

- Vérifier que $(2, 1)$ est une solution de (E_1)
- Déterminer l'ensemble des solutions de (E_1)
- Soit (a, b) une solution de (E_1) . On note $d = \text{PGCD}(a, b)$, préciser les valeurs possibles de d
- Pour chaque valeur de d donner un exemple de solution

2) On considère l'équation

$$(E_2) \quad 5x^2 - 7y^2 = 3, \quad \text{où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs}$$

- Montrer que si x et y sont des multiples de 3, alors le couple (x, y) n'est pas solution de (E_2)
- Montrer que si le couple (x, y) est une solution de (E_2) alors $2x^2 \equiv y^2 [3]$
- Soit z un entier relatif, compléter les congruences suivantes:

$$\text{Si } z \equiv 1 [3] \quad \text{alors } z^2 \equiv \dots [3]$$

$$\text{Si } z \equiv 2 [3] \quad \text{alors } z^2 \equiv \dots [3]$$

- En déduire que l'équation (E_2) n'admet pas de solution.