



**Exercice 1 (4 points)**

1) On considère, dans  $\mathbb{C}$ , l'équation (E) :  $z^2 - 2(1+i)z + 3 - 2i = 0$

a) Vérifier que  $(1+2i)^2 = -3+4i$

b) Résoudre, dans  $\mathbb{C}$ , l'équation (E).

2) Dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :  $z_A = -i$ ,  $z_B = 3$ ,  $z_C = 2+3i$  et  $z_D = -1+2i$

a) Placer les points A, B, C et D dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

b) Calculer  $|z_C - z_A|$  et  $|z_D - z_B|$

c) Calculer  $(z_C - z_A)\overline{(z_D - z_B)}$

d) Dédire que ABCD est un carré et calculer son aire.

**Exercice 2 (4 points)**

1) On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$

a) Étudier les variations de  $g$  sur  $]0, +\infty[$

b) En déduire le signe de  $g$  sur  $]0, +\infty[$

2) On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{x}$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 3 cm

a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et interpréter graphiquement le résultat

b) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + 1)$ . Interpréter graphiquement ce résultat

c) Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

d) Dresser le tableau de variations de  $f$

e) Préciser la position de la courbe  $\mathcal{C}$  par rapport à son asymptote et tracer  $\mathcal{C}$

3) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe  $\mathcal{C}$ , les droites d'équation  $x=1$  ;  $x=2$  et  $y=x-1$ .

### Exercice 3 (6 points)

On donne les matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

- 1) a) Montrer que la matrice  $A$  est inversible
- b) Calculer  $A \times B$  et en déduire  $A^{-1}$  la matrice inverse de  $A$

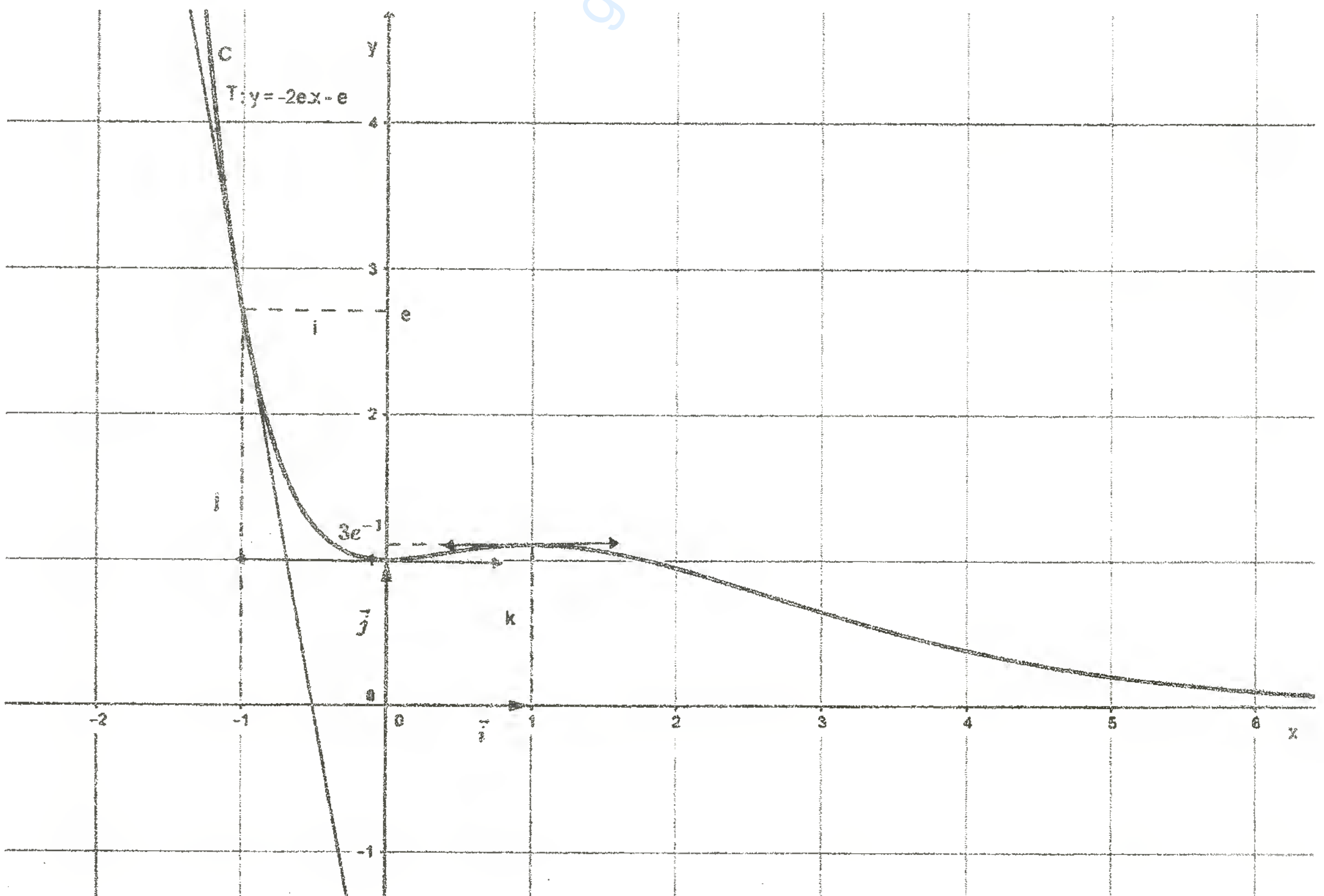
2) Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

La courbe  $C$  représentée ci-dessous est celle d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , elle admet :

- Une branche parabolique de direction  $(O ; \vec{j})$  au voisinage de  $-\infty$
- Une asymptote horizontale d'équation  $y = 0$  au voisinage de  $+\infty$
- Deux tangentes horizontales aux points d'abscisses 0 et 1
- La tangente  $T$  au point d'abscisse  $-1$  a pour équation  $y = -2e x - e$

A l'aide du graphique et des renseignements fournis donner :

- a)  $f(1)$  ;  $f(-1)$  et  $f'(-1)$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$



3) On suppose que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$  où  $a, b, c$  sont des réels

a) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = (-ax^2 + (2a - b)x + (b - c))e^{-x}$

b) Montrer que les réels  $a, b$  et  $c$  vérifient le système

$$(S) : \begin{cases} a + b + c & = 3 \\ a - b + c & = 1 \\ -3a + 2b - c & = -2 \end{cases}$$

c) Ecrire le système (S) sous forme matricielle et en déduire l'expression de  $f(x)$

4) Soit  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) = (-x^2 - 3x - 4)e^{-x}$

a) Vérifier que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe  $C$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$ .

#### Exercice 4 (6 points)

1) a) Compléter le tableau suivant :

$r$	0	1	2	3	4
Le reste de la division euclidienne de $2^r$ par 5					
Le reste de la division euclidienne de $3^r$ par 5					
Le reste de la division euclidienne de $2^r + 3^r$ par 5					

b) En déduire que pour tout entier naturel  $q$ ,  $2^{4q} \equiv 1[5]$  et  $3^{4q} \equiv 1[5]$

2) Pour tout entier naturel  $k \geq 1$ , notons  $r$  le reste de la division euclidienne de  $k$  par 4.

a) Quelles sont les valeurs possibles de  $r$  ?

b) Donner, selon la valeur de  $r$ , le reste de la division euclidienne de  $2^k + 3^k$  par 5

3) a) Vérifier que pour tout entier naturel  $k \geq 1$ ,  $2^k + 3^k$  est impair

b) Donner suivant les valeurs de  $k$ , le chiffre des unités de  $2^k + 3^k$

4) Quel est le chiffre des unités de  $2^{2017} + 3^{2017}$  ?