التمريـــــــــن الأول : (3,25 نقطة)

- $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية.
- $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,.)$ فضاء متجهي حقيقي.
- $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي.
- نضع : $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix}0&\sqrt{3}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0\end{pmatrix}$ و $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a&\sqrt{3}b\\-\frac{1}{\sqrt{3}}b&a\end{pmatrix}\ /\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

لاحظ أن : $I=M(1,0)$ و $J=M(0,1)$.

.1 أ- لدينا :

✓ $E\neq\varnothing$ ، لأن : $M(0,0)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in E$.

✓ $E\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

✓ ليكن A و B عنصرين من E وليكن $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. إذن : $\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2\ /\ A=M(a,b)$

$\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2\ /\ B=M(c,d)$

$$\alpha A+\beta B=\alpha\begin{pmatrix}a&\sqrt{3}b\\-\frac{1}{\sqrt{3}}b&a\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}c&\sqrt{3}d\\-\frac{1}{\sqrt{3}}d&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a+\beta c&\sqrt{3}(\alpha b+\beta d)\\-\frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha b+\beta d)&\alpha a+\beta c\end{pmatrix}$$

$$\alpha A+\beta B=M(\alpha a+\beta c,\alpha b+\beta d)\in E$$

وبالتالي فإن $(E,+,.)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,.)$.

ب- لنبين أن (I,J) أساس في الفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,.)$:

✓ لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$ ، لدينا : $M(a,b)=a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&\sqrt{3}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0\end{pmatrix}=aI+bJ$. إذن (I,J) أسرة مولدة للفضاء الحقيق E.

✓ (I,J) أسرة حرة في E ، لأن : لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$ ، لدينا :

$$aI+bJ=0\Rightarrow M(a,b)=0\Rightarrow\begin{pmatrix}a&\sqrt{3}b\\-\frac{1}{\sqrt{3}}b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow a=b=0$$

وبالتالي فإن (I,J) أساس في الفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,.)$ ، و $E=\left\{aI+bJ\ /\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

2. ليكن $E^{*}=E\setminus\{M(0,0)\}$. نعتبر التطبيق f المعرف من $\mathbb{C}^{*}$ نحو E^{*} بما يلي :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{C}^{*} & \to & E^{*} \\ & & a+ib & \mapsto & M(a,b) \end{array}$$

أ- نعتبر $A=aI+bJ$ و $B=cI+dJ$ عنصرين من E.

لدينا :
$$J^{2}=\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=-I$$

إذن : $A\times B=(aI+bJ)\times(cI+dJ)=acI+(ad+bc)J+bdJ^{2}=(ac-bd)I+(ad+bc)J\in E$.

وبالتالي فإن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

ملاحظة : $\boxed{M(a,b)\times M(c,d)=M(ac-bd,ad+bc)}$

ب- إذا كان $(a,b)\in\mathbb{R}^{2}\ /\ z=a+ib\in\mathbb{C}^{*}$ ، فإن : $f(z)=M(a,b)\in E^{*}$. ومنه فإن f تطبيق معرف.

✓ ليكن $(a,b)\in\mathbb{R}^{2}\ /\ z=a+ib\in\mathbb{C}^{*}$ و $(a',b')\in\mathbb{R}^{2}\ /\ z'=a'+ib'\in\mathbb{C}^{*}$. لدينا :

$$\begin{aligned} f(z\times z') &= f\left((aa'-bb')+i(ab'+a'b)\right) \\ f(z\times z') &= M(aa'-bb',ab'+a'b) \\ f(z\times z') &= M(a,a')\times M(b,b') \\ f(z\times z') &= f(z)\times f(z') \end{aligned}$$

ومنه فإن f تطبيق تشاكلي من $(\mathbb{C}^{*},\times)$ نحو $(E^{*},\times)$.

✓ نعتبر $A\in E^{*}$. بما أن (I,J) أساس في الفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,.)$ فإن :

$\exists!(a,b)\in\mathbb{R}^{2}\ /\ A=aI+bJ=M(a,b)=f(a+ib)$. ولدينا $A\in E^{*}$. إذن $a+ib\in\mathbb{C}^{*}$.

وبالتالي فإن : $\forall A\in E^{*}\ :\ \exists z\in\mathbb{C}^{*}\ /\ f(z)=A$. إذن f تطبيق تقابلي.

خلاصة : f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^{*},\times)$ نحو $(E^{*},\times)$.

3. لدينا :

✓ $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي . إذن : $(E,+)$ **زمرة تبادلية** .

✓ E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ و $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية . ومنه نستنتج أن :

- القانون $\times$ تجميعي في E .
- القانون $\times$ توزيعي على القانون $+$ في E .
- I هو العنصر المحايد بالنسبة للقانون $\times$ في E .

وهذا يدل على أن $(E,+,\times)$ **حلقة واحدية**.

✓ لدينا f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^{*},\times)$ نحو $(E^{*},\times)$ ، إذن :

- القانون $\times$ تبادلي في $\mathbb{C}^{*}$ ، يستلزم أن القانون $\times$ تبادلي في E^{*} ، ولدينا $\forall A\in E\ :\ A\times 0=0\times A=0$.

إذن $\times$ **قانون تبادلي في E** .

✓ بما أن $(\mathbb{C}^{*},\times)$ زمرة تبادلية و f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^{*},\times)$ نحو $(E^{*},\times)$ ، فإن $(E^{*},\times)$ **زمرة**.

وبالتالي فإن : $(E,+,\times)$ **جسم تبادلي** .

4. لنحل في E المعادلة $J\times X^3=I$. لدينا :

$$J\times X^3=I \iff f^{-1}\left(J\times X^3\right)=f^{-1}(I)$$

$$J\times X^3=I \iff f^{-1}(J)\times\left(f^{-1}(X)\right)^3=f^{-1}(I)$$

وبما أن : $f^{-1}(J)=f^{-1}\left(M(0,1)\right)=0+1\times i=i$ و $f^{-1}(I)=f^{-1}\left(M(1,0)\right)=1+0\times i=\boxed{1}$.

و $f^{-1}(X)=z$ ، فإن المعادلة السابقة تصبح :

$$\begin{aligned}J\times X^3=I &\iff iz^3=1\\ &\iff z^3=-i\\ &\iff z^3=i^3\\ &\iff \left(\frac{z}{i}\right)^3=1\\ J\times X^3=I &\iff \frac{z}{i}\in\left\{1,j,\overline{j}\right\}\end{aligned}$$

حيث $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\overline{j}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. إذن :

$$J\times X^3=I \iff z\in\left\{i,ij,i\overline{j}\right\}$$

$$J\times X^3=I \iff X=f(z)\in\left\{f(i),f(ij),f\left(i\overline{j}\right)\right\}$$

ولدينا :

$$f(i)=M(0,1)=J=\begin{pmatrix}0 & \sqrt{3}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0\end{pmatrix}$$

و :

$$f(ij)=f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

و :

$$f\left(i\overline{j}\right)=f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=M\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

وبالتالي فإن مجموعة حلول المعادلة $J\times X^3=I$ في E هي :

$$S=\left\{\begin{pmatrix}0 & \sqrt{3}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\right\}$$

التمريـــــــن الثانــــــــي : (3,75 نقطة)

ليكن $a\in\mathbb{C}^*$.

I. نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(G)\ :\ iz^2+(a+\bar{a}-i)z-\bar{a}-ia\bar{a}=0$.

1. أ- مميز المعادلة (G) هو :

$$\Delta=b^2-4ac=(a+\bar{a}-i)^2-4i(-\bar{a}-ia\bar{a})$$
$$\Delta=((a-i)+\bar{a})^2-4\bar{a}(a-i)$$
$$\Delta=(a-i)^2+2\bar{a}(a-i)+\bar{a}^2-4\bar{a}(a-i)$$
$$\Delta=(a-i)^2-2\bar{a}(a-i)+\bar{a}^2$$
$$\Delta=(a-i-\bar{a})^2$$
$$\Delta=(a-\bar{a}-i)^2$$

ب- مميز المعادلة (G) هو $\Delta=(a-i-\bar{a})^2$. إذن للمعادلة (G) حلين عقديين هما :

$z_1=\dfrac{-(a+\bar{a}-i)+(a-\bar{a}-i)}{2i}=\dfrac{-2\bar{a}}{2i}=\boxed{i\bar{a}}$ و $z_2=\dfrac{-(a+\bar{a}-i)-(a-\bar{a}-i)}{2i}=\dfrac{-2a+2i}{2i}=\boxed{1+ia}$.

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة (G) هي : $S=\{i\bar{a},1+ia\}$.

2. a حل للمعادلة (G) $\Leftrightarrow a=i\bar{a}$ أو $a=1+ia$

$$\Leftrightarrow \Re e(a)+i\,\Im m(a)=\Im m(a)+i\,\Re e(a) \text{ أو } a=\frac{1}{1-i}$$
$$\Leftrightarrow \Re e(a)=\Im m(a) \text{ أو } a=\frac{1}{2}(1+i)$$
$$\Leftrightarrow \Re e(a)=\Im m(a)$$

II. المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$. نفترض أن : $\Re e(a)\neq\Im m(a)$.

A و B و C نقط ألحاقها على التوالي a و $i\bar{a}$ و $1+ia$.

1. نضع : $Z=\dfrac{(1+ia)-a}{(i\bar{a})-a}$.

أ- لدينا : $\overline{Z}=\overline{\left(\dfrac{(1+ia)-a}{(i\bar{a})-a}\right)}=\dfrac{(1-i\bar{a})-\bar{a}}{(-ia)-\bar{a}}=\dfrac{i\left[(-i-\bar{a})+i\bar{a}\right]}{i\left[-a+i\bar{a}\right]}=\dfrac{\bar{a}(i-1)-i}{i\bar{a}-a}$.

ب- A و B و C نقط مستقيمية $\Leftrightarrow \dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow Z\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow Z=\overline{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(1+ia)-a}{(i\bar{a})-a}=\frac{(i-1)\bar{a}-i}{i\bar{a}-a}$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+ia)-a=(i-1)\bar{a}-i$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+a(i-1)-(i-1)\bar{a}+i=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (i-1)(a-\bar{a})=-(1+i)$$

$$\Leftrightarrow \quad a-\bar{a}=\frac{1+i}{1-i}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2i\,\Im m\,(a)=\frac{(1+i)^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2i\,\Im m\,(a)=i$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\Im m\,(a)=\frac{1}{2}}$$

2. نفترض في هذا السؤال أن : $\Im m\,(a)\neq\frac{1}{2}$.

تذكير : ليكن $R(\Omega,\theta)$ الدوران الذي مركزه $\Omega(\omega)$ وزاويته θ . ولتكن $M(z)$ و $M'(z')$ نقطتين من المستوى العقدي.

$$\boxed{R(\Omega,\theta)(M)=M' \Leftrightarrow z'=e^{i\theta}z+\left(1-e^{i\theta}\right)\omega}$$

نعتبر R_1 الدوران الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ و R_2 الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

نضع : $R_1(B)=B'$ و $R_2(C)=C'$. لتكن النقطة E منتصف القطعة $[BC]$.

أ- لدينا: $R_1(B)=B'$ ، إذن : $b'=e^{-i\frac{\pi}{2}}b+\left(1-e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)a=-i(i\bar{a})+(1+i)a=\boxed{(1+i)a+\bar{a}}$.

ولدينا : $R_2(C)=C'$ ، إذن : $c'=e^{i\frac{\pi}{2}}c+\left(1-e^{i\frac{\pi}{2}}\right)a=i(1+ia)+(1-i)a=i-a+a-ia=\boxed{i-ia}$

ب- لدينا E منتصف القطعة $[BC]$. إذن : $e=aff(E)=\frac{b+c}{2}=\frac{i\bar{a}+1+ia}{2}$.

إذن : $\left(\overline{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{B'C'}}\right)\equiv\arg\left(\frac{c'-b'}{e-a}\right)[2\pi]$.

ولدينا : $\frac{c'-b'}{e-a}=\frac{(i-ia)-(a+ia+\bar{a})}{\frac{i\bar{a}+1+ia}{2}-a}=\frac{i-2ia-a-\bar{a}}{\frac{1+ia+i\bar{a}-2a}{2}}=\frac{2i(1+ia+i\bar{a}-2a)}{1+ia+i\bar{a}-2a}=2i=\left[2,\frac{\pi}{2}\right]$.

إذن: $\boxed{\left(\overline{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{B'C'}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]}$ و $\frac{B'C'}{AE}=\left|\frac{c'-b'}{e-a}\right|=2$ إذن: $\boxed{(B'C')\perp(AE)}$ و $\boxed{B'C'=2AE}$.

التمريـــــن الثالث : (3 نقطة)

I. نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة التالية : $(E)\ :\ 35u-96v=1$.

1. لدينا : $35\times11-96\times4=385-384=1$. إذن $(11,4)$ حل خاص للمعادلة (E) .

2. لدينا : $35\times11-96\times4=1$. حسب Bezout، نستنتج أن 96 و 35 أوليان فيما بينهما : $35\wedge96=1$.

$$\ominus\ \begin{array}{l} 35u-96v=1 \\ 35\times11-96\times4=1 \\ \hline \end{array}$$

$$35(u-11)-96(v-4)=0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 35(u-11)=96(v-4) \quad (i)\\
&\Rightarrow 35/96(v-4)\\
&\underset{Gauss}{\Rightarrow} 35/v-4\\
&\Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z}\ /\ v-4=35k \quad (ii)\\
&\Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z}\ /\ v=4+35k
\end{aligned}$$

نعوض نتيجة العلاقة (ii) في العلاقة (i) ، فنجد : $35(u-11)=96\times35k$. أي : $u-11=96k$ يكافئ $u=11+96k$

وبما أن الأزواج $(11+96k,4+35k)$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$ ، تحقق المعادلة (E) ، فإن مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$S=\{(11+96k,4+35k)\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$$

II. نعتبر في المجموعة $\mathbb{N}$ المعادلة التالية : $(F)\ :\ x^{35}\equiv2[97]$.

1. ليكن x حلا للمعادلة (F) .

أ- لدينا :

97	p	q	r	p^2
	2	48	1	4
	3	32	1	9
	5	19	2	25
	7	13	6	49
	11	8	9	121 stop

إذن 97 عدد أولي . (نتوقف إذا كان $p^2>97$ أو $q<p$)

لبكن $97\wedge x=d$. إذن $d/97$ و 97 عدد أولي ، ومنه فإن : $d=1$ أو $d=97$. نفترض أن : $d=97$.

إذن : $97\wedge x=97$. وعليه فإن : $97/x$ أي : $x\equiv0[79]$ وهذا يستلزم : $x^{35}\equiv0[97]$. ولدينا:

$x^{35}\equiv2[97]$. إذن : $0\equiv2[97]$ و $0,2\in\{0,1,2,...,97\}$. وهذا يشير إلى أن $0=2$. وهذا تناقض.

وبالتالي فإن : $\boxed{97\wedge x=1}$. 97 و x أوليان فيما بينهما.

ب- لدينا : $97 \wedge x = 1$ و 97 عدد أولي . حسب مبرهنة فيرما ، لدينا : $x^{96} \equiv 1[97]$.

جـ- بما أن : $x^{35} \equiv 2[97]$ ، فإن : $(x^{35})^{11} \equiv 2^{11}[97]$. أي : $x^{385} \equiv 2^{11}[97]$: (i).

ولدينا : $385 = 96 \times 4 + 1$. إذن : $x^{385 = 96\times4+1} = (x^{96})^4 \times x$

و لدينا : (ii) $x^{96} \equiv 1[97] \Rightarrow (x^{96})^4 \equiv 1^4[97] \Rightarrow (x^{96})^4 \times x \equiv x[97] \Rightarrow x^{385} \equiv x[97]$.

من (i) و (ii) نستنتج أن : $\boxed{x \equiv 2^{11}[97]}$.

2. ليكن x عددا صحيحا طبيعيا بحيث : $x \equiv 2^{11}[97]$. إذن : $x^{35} \equiv 2^{11\times35}[97]$ ومنه فإن $x^{35} \equiv 2^{385}[97]$. أي :

$x^{35} \equiv (2^{96})^4 \times 2[97]$. وبما أن : 97 أولي و $97 \wedge 2 = 1$ ، فإنه ، حسب مبرهنة فيرما ، لدينا : $2^{96} \equiv 1[97]$.

إذن: $(2^{96})^4 \equiv 1[97]$ ومنه نستنتج أن : $x^{35} \equiv 2[97]$. أي : x حل للمعادلة (F) .

3. لدينا : $(F) \Leftrightarrow x \equiv 2^{11}[97]$. وبما أن : $2^{11} = 2048 = 97 \times 21 + 11$ ، فإن : $2^{11} \equiv 11[97]$.

وبناء عليه فإن : $(F) \Leftrightarrow x \equiv 11[97] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \;\; / \;\; x = 11 + 97k$.

التمرين الرابع : (10 نقط)

I. لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $f(x) = 2x - e^{-x^2}$.

وليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ- $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 2x) = \lim_{x\to+\infty} -e^{-x^2} = \lim_{t\to-\infty} -e^t = 0$ حيث : $t = -x^2$ و $t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

ومن نستنتج أن $(\mathscr{C})$ يقبل مقاربا مائلا ، بجوار $+\infty$ ، معادلته $y = 2x$.

ب- ليكن $x \in \mathbb{R}^+$. لدينا : $f'(x) = \left(2x - e^{-x^2}\right)' = 2 + 2xe^{-x^2} = 2\left(1 + e^{-x^2}\right) > 0$.

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	-1 $\nearrow$ 0

جـ- لدينا : f متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[0, +\infty[$. إذن : f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من المجال

$[0, +\infty[$ نحو المجال $f([0, +\infty[) = [f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)[= [-1, 0[$.

وبما أن $0 \in [-1, 0[$ ، فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0, +\infty[$.

ولدينا : $f(0)=-1<0$ و $f(1)=1-e^{-1}=\frac{e-1}{e}>0$. إذن : $f(0)\times f(1)<0$. وحسب مبرهنة القيم الوسيطية ، نستنتج

أن : $\boxed{0<\alpha<1}$.

د- f تزايدية على المجال $[0,1]$. إذن : لكل $x\in[0,1]$ ، لدينا :

$$x\in[0,\alpha[\Rightarrow x<\alpha\Rightarrow f(x)<f(\alpha)\Rightarrow f(x)<0$$

$$x\in]\alpha,1]\Rightarrow\alpha<x\Rightarrow f(\alpha)<f(x)\Rightarrow 0<f(x)$$

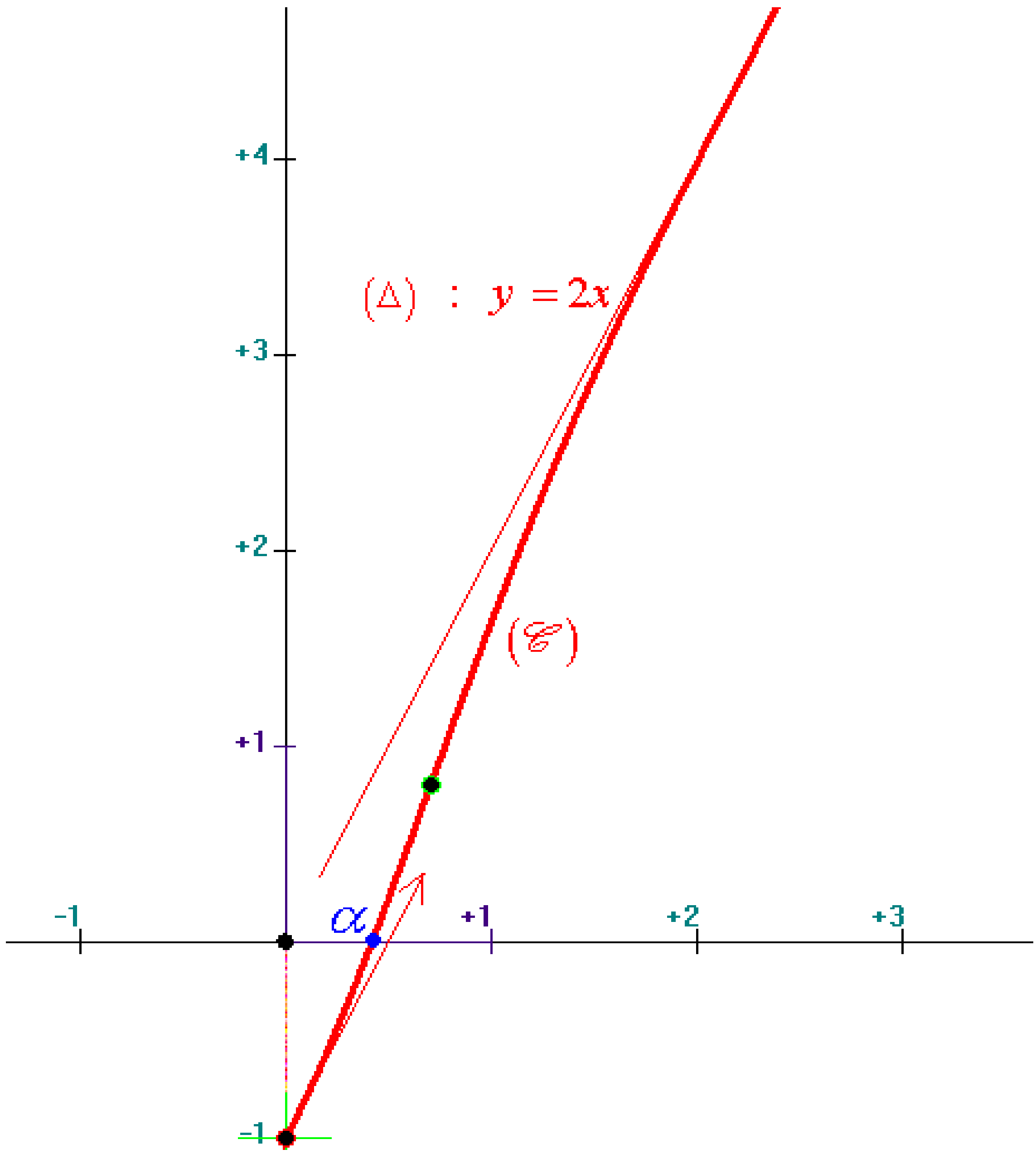
$$f(\alpha)=0$$

وبالتالي فإن :

$$\forall x\in[0,\alpha]\ :\ f(x)\leq 0$$

$$\forall x\in[\alpha,1]\ :\ f(x)\geq 0$$

2. إنشاء المنحنى $(\mathscr{C})$: $\alpha\approx 0,4$



II. نعتبر الدالتين العدديتين φ و g للمتغير الحقيقي x المعرفتين على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$\begin{cases}\varphi(x)=\frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt & ; \quad x>0\\ \varphi(0)=1\end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=x^2-\int_0^x e^{-t^2}dt$$

1. أ- **الطريقة الأولى :**

ليكن $x>0$. نعتبر الدالة $\zeta : x \mapsto e^{-x^2}$. لدينا : ζ دالة متصلة على المجال $[0,x]$. حسب **خاصية القيمة المتوسطة،** لدينا : $\exists c\in]0,x[\quad / \quad \zeta(c)=\frac{1}{x-0}\int_0^x e^{-t^2}dt$. أي : $\exists c\in]0,x[\quad / \quad \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt=e^{-c^2}$.

الطريقة الثانية :

نضع : $F(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt \quad : \quad \forall x\in\mathbb{R}^+$.

F دالة متصلة على $\mathbb{R}^+$ وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$. ليكن $x\in\mathbb{R}^{+*}$. لدينا : F دالة متصلة على $[0,x]$ وقابلة للاشتقاق على $]0,x[$. حسب مبر هنة التزايدات المنتهية ، نستنتج أن : $\exists c\in]0,x[\quad / \quad F(x)-F(0)=F'(c)(x-0)$.

ولدينا : $F'(u)=e^{-u^2} \quad : \quad \forall u\in\mathbb{R}^{+*}$. إذن : $F'(c)=e^{-c^2}$. ومنه فإن : $F(x)=e^{-c^2}x$.أي :

$\int_0^x e^{-t^2}dt=e^{-c^2}x$. وبالتالي فإن : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^{+*} \quad , \quad \exists c\in]0,x[\quad : \quad \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt=e^{-c^2}}$.

ب- من أجل $x=1$ ، حسب السؤال السابق ، لدينا : $\exists c\in]0,1[\quad / \quad \int_0^1 e^{-t^2}dt=e^{-c^2}$. ولدينا :

$0<c<1 \Rightarrow -c^2<0 \Rightarrow e^{-c^2}<1$. إذن : $\int_0^1 e^{-t^2}dt<1$.

2. أ- لدينا: $\int_0^\alpha f(t)dt=\int_0^\alpha\left(2t-e^{-t^2}\right)dt=\left[t^2\right]_0^\alpha-\int_0^\alpha e^{-t^2}dt=\alpha^2-\int_0^\alpha e^{-t^2}dt=g(\alpha)$. $\boxed{g(\alpha)=\int_0^\alpha f(t)dt}$

ب- لدينا : $g(x)=\int_0^x f(t)dt \quad : \quad \forall x\in\mathbb{R}^+$. ولدينا f دالة متصلة على $\mathbb{R}^+$. إذن : g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$ و

لدينا : $g'(x)=\left(\int_0^x f(t)dt\right)'=f(x) \quad : \quad \forall x\in\mathbb{R}^+$.

جـ- نعلم أن g دالة متصلة على المجال $[\alpha,1]$ و أن : $g'(x)=f(x)>0 \quad : \quad \forall x\in]\alpha,1[$ ، إذن g تزايدية قطعا

على المجال $[\alpha,1]$. ولدينا: $g(1)=1^2-\int_0^1 e^{-t^2}dt=1-\int_0^1 e^{-t^2}dt>0$ ، لأن: $\int_0^1 e^{-t^2}dt<1$ ، و $g(\alpha)=\int_0^\alpha f(t)dt$

وحيث أن : $f(t)<0 \quad : \quad \forall t\in[0,\alpha[$ ، فإن : $g(\alpha)<0$.

حسب مبرهنة القيم الوسيطية، نستنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]\alpha,1[$.

3. أ- ليكن $x>0$ و $t\in[0,x]$. لدينا :

$$0<t<x \Rightarrow -x^2<-t^2<0 \Rightarrow e^{-x^2}<e^{-t^2}<1 \Rightarrow \int_0^x e^{-x^2}dt<\int_0^x e^{-t^2}dt<x \Rightarrow xe^{-x^2}<\int_0^x e^{-t^2}dt<x$$

$$0<t<x \Rightarrow e^{-x^2}<\frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt<1 \Rightarrow e^{-x^2}<\varphi(x)<1$$

بما أن : $\lim_{x\to 0^+} e^{-x^2}=1$ و $\lim_{x\to 0^+} 1=1$ ، فإن : $\boxed{\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=1=\varphi(0)}$.ومنه فإن φ متصلة على اليمين في 0.

ب- ليكن $x>0$.الدالتان $t\mapsto t$ و $t\mapsto e^{-t^2}$ متصلتان وقابلتان للاشتقاق على المجال $[0,x]$ و دالتاهما المشتقتان $t\mapsto 1$ و $t\mapsto -2te^{-t^2}$ متصلتان على المجال $]0,x[$. حسب تقنية المكاملة بالأجزاء ، لدينا :

$$\varphi(x)=\frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt=\frac{1}{x}\int_0^x t'\times e^{-t^2}dt=\frac{1}{x}\left(\left[te^{-t^2}\right]_0^x-\int_0^x t\times\left(-2te^{-t^2}\right)dt\right)$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{x}\left(xe^{-x^2}+\int_0^x t^2e^{-t^2}dt\right)=e^{-x^2}+\frac{2}{x}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$$

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\ :\ \varphi(x)=e^{-x^2}+\frac{2}{x}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt}$

جـ- بما أن $t\mapsto t^2e^{-t^2}$ دالة متصلة على $\mathbb{R}^+$، فإن الدالة $x\mapsto\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$، ولدينا :

$$\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\ :\ \left(\int_0^x t^2e^{-t^2}dt\right)'=x^2e^{-x^2}$$

وبما أن الدالتين $x\mapsto\frac{2}{x}$ و $x\mapsto e^{-x^2}$ قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$، فإن الدالة φ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$ ولكل x من $\mathbb{R}^{+*}$،

لدينا : $$\varphi'(x)=\left(e^{-x^2}+\frac{2}{x}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt\right)'=-2xe^{-x^2}+\left(\frac{2}{x}\right)'\int_0^x t^2e^{-t^2}dt+\frac{2}{x}\left(\int_0^x t^2e^{-t^2}dt\right)'$$

$$\varphi'(x)=-2xe^{-x^2}-\frac{2}{x^2}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt+\frac{2}{x}\left(x^2e^{-x^2}\right)=-\frac{2}{x^2}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$$

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\ :\ \varphi'(x)=-\frac{2}{x^2}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt}$

د- نعلم أن φ دالة متصلة على المجال $[0,1]$ وأن $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\ :\ \varphi'(x)=-\frac{2}{x^2}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt<0$ ، إذن φ تناقصية قطعا على المجال $[0,1]$. إذن : $\varphi([0,1])=[\varphi(1),\varphi(0)]=[\varphi(1),1]\subset[0,1]$ لأن $\varphi(1)>e^{-1^2}>0$ (أنظر: 3- أ-)

خلاصة : $\boxed{\varphi([0,1])\subset[0,1]}$

4. أ- ليكن $x\in\mathbb{R}^+$. وليكن $t\in[0,x]$. لدينا :

$$-t^2\le 0\Rightarrow e^{-t^2}\le 1\Rightarrow t^2e^{-t^2}\le t^2\Rightarrow\int_0^x t^2e^{-t^2}dt\le\int_0^x t^2dt\Rightarrow\int_0^x t^2e^{-t^2}dt\le\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x$$

$$\Rightarrow\boxed{\int_0^x t^2e^{-t^2}dt\le\frac{x^3}{3}}$$

ب- لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\ :\ |\varphi'(x)|=\frac{2}{x^2}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$ و $\forall x\in\mathbb{R}^+\ :\ \int_0^x t^2e^{-t^2}dt\le\frac{x^3}{3}$.

إذن : $\forall x\in\left]0,1\right[\ :\ |\varphi'(x)|\le\frac{2}{x^2}\times\frac{x^3}{3}\le\frac{2}{3}x\le\frac{2}{3}$.

جـ- ليكن $x\in\mathbb{R}^{+*}$. لدينا : $\varphi(x)=x\Leftrightarrow\frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt=x\Leftrightarrow\int_0^x e^{-t^2}dt=x^2\Leftrightarrow x^2-\int_0^x e^{-t^2}dt=0\Leftrightarrow g(x)=0$.

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\ :\ \varphi(x)=x\Leftrightarrow g(x)=0}$.

5. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{2}{3} \\ u_{n+1} = \varphi(u_n) \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أ- من أجل $n=0$ ، لدينا $u_0=\dfrac{2}{3}$. إذن : $0\le u_0\le 1$.

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$. نفترض أن $0\le u_n\le 1$ ونبين أن $0\le u_{n+1}\le 1$:

لدينا : $\varphi([0,1])\subset[0,1]$. إذن : $\forall x\in[0,1] \ : \ 0\le\varphi(x)\le 1$. وبما أن $0\le u_n\le 1$ ، فإن $0\le u_{n+1}\le 1$.

✓ وبالتالي فإنه حسب مبدأ الترجع ، لدينا : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N} \ : \ 0\le u_n\le 1}$.

ب- ليكن x من المجال $[0,1]$ ، نعتبر المجال $[a,b]$ حيث $a=\min(x,\beta)$ و $b=\max(x,\beta)$. لدينا : φ دالة متصلة على المجال $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على المجال $]a,b[$. حسب مبرهنة التزايدات المنتهية ، يوجد على الأقل عدد حقيقي c بحيث :

$a<c<b$ و $\varphi(x)-\varphi(\beta)=\varphi'(c)(x-\beta)$. أي : $\varphi(x)-\varphi(\beta)=\varphi'(c)(x-\beta)$.

ولدينا : $g(\beta)=0$. إذن : $\varphi(\beta)=\beta$. ومنه فإن : $\varphi(x)-\beta=\varphi'(c)(x-\beta)$.

وبما أن : $0<a<c<b<1$ ، فإن : $|\varphi'(c)|\le\dfrac{2}{3}$. ثم نحصل على : $|\varphi(x)-\beta|=|\varphi'(c)||x-\beta|\le\dfrac{2}{3}|x-\beta|$.

إذن : $\boxed{\forall x\in[0,1] \ : \ |\varphi(x)-\beta|\le\dfrac{2}{3}|x-\beta|}$.

ليكن $n\in\mathbb{N}$. لدينا : $u_n\in[0,1]$. إذن : $|\varphi(u_n)-\beta|\le\dfrac{2}{3}|u_n-\beta|$. أي : $|u_{n+1}-\beta|\le\dfrac{2}{3}|u_n-\beta|$.

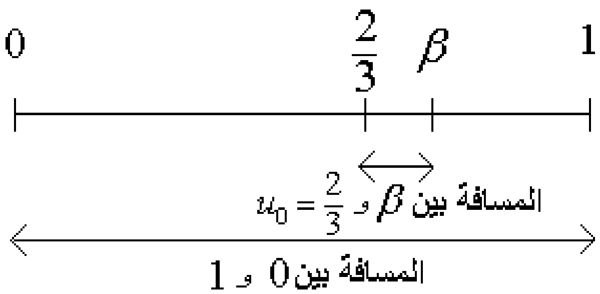
ومنه فإن : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N} \ : \ |u_{n+1}-\beta|\le\dfrac{2}{3}|u_n-\beta|}$. ولدينا :

$$\times\begin{cases} |u_1-\beta|\le\dfrac{2}{3}|u_0-\beta| \\ |u_2-\beta|\le\dfrac{2}{3}|u_1-\beta| \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ |u_{n-1}-\beta|\le\dfrac{2}{3}|u_{n-2}-\beta| \\ |u_n-\beta|\le\dfrac{2}{3}|u_{n-1}-\beta| \end{cases}$$

$$|u_n-\beta|\le\left(\dfrac{2}{3}\right)^n|u_0-\beta|$$

وذلك بعد ضرب طرفي المتفاوتات السابقة، على التوالي، طرفا بطرف ، وبعد الاختزال

ولدينا : $\left|u_0-\beta\right|=\left|\frac{2}{3}-\beta\right|\leq\left|1-0\right|\leq 1$



وبالتالـــــــي فإن : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\quad:\quad\left|u_n-\beta\right|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

و نتحقق من هذه العبارة بالترجع.

جـ- لدينا : $\forall n\in\mathbb{N}\quad:\quad\left|u_n-\beta\right|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n$ و $-1<\frac{2}{3}<1$. إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$. وحسب مصاديق التقارب، فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها β . $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\beta}$.