

1 أ

لتكن  $M(a, b)$  و  $M(x, y)$  مصفوفتين من  $F$

$$M(x, y) \times M(a, b) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \begin{pmatrix} xa & xb + \frac{y}{a} \\ 0 & \frac{1}{xa} \end{pmatrix}$$

$$= M\left(xa ; xb + \frac{y}{a}\right)$$

إذن  $F$  جزء مستقر من  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

1 ب

لدينا  $F$  جزء مستقر من  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

إذن  $\times$  قانون تركيب داخلي في  $F$

لتكن  $M(a, b)$  و  $M(c, d)$  و  $M(e, f)$  ثلاثة عناصر من  $F$

لدينا :

$$(M(a, b) \times M(c, d)) \times M(e, f) = M\left(ac, ad + \frac{b}{c}\right) \times M(e, f)$$

$$= M\left(eac, acf + \frac{ad}{e} + \frac{b}{ce}\right)$$

و لدينا كذلك :

$$M(a, b) \times (M(c, d) \times M(e, f)) = M(a, b) \times M\left(ce, cf + \frac{d}{e}\right)$$

$$= M\left(eac, acf + \frac{ad}{e} + \frac{b}{ce}\right)$$

و بالتالي :

$$(M(a, b) \times M(c, d)) \times M(e, f) = M(a, b) \times (M(c, d) \times M(e, f))$$

يعني  $\times$  قانون تجميعي في  $F$ .

ليكن  $M(e_1; e_2)$  العنصر المحايد للضرب في  $F$

$$\Leftrightarrow \forall M(a, b) \in F ; M(a, b) \times M(e_1; e_2) = M(e_1; e_2) \times M(a, b) = M(a, b)$$

$$\Leftrightarrow M\left(ae_1 ; ae_2 + \frac{b}{e_1}\right) = M(a, b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ae_1 = a \\ ae_2 + \frac{b}{e_1} = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = 1 \in \mathbb{R}^* \\ e_2 = 0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

إذن  $M(1,0) = I$  هو العنصر المحايد لضرب المصفوفات في  $F$ .

لتكن المصفوفة  $M(x', y')$  ممتثلة المصفوفة  $M(x, y)$  بالنسبة لـ  $\times$  في  $F$ .

$$\Leftrightarrow M(x, y) \times M(x', y') = M(x', y') \times M(x, y) = I$$

$$\Leftrightarrow M\left(xx', xy' + \frac{y}{x'}\right) = M(1,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^* \\ y' = -y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

إذن كل مصفوفة  $M(x, y)$  تمتلك مصفوفة ممتثلة  $M\left(\frac{1}{x}; -y\right)$  بالنسبة

للضرب في  $F$ .

لدينا  $\times$  ليس تبادلياً لأن :

$$\begin{cases} M(x, y) \times M(y, x) = M(xy, x^2 + 1) \\ M(y, x) \times M(x, y) = M(xy, y^2 + 1) \end{cases} \text{ و}$$

نلاحظ إذن أن :  $x^2 + 1 \neq y^2 + 1$  ;  $(\forall x \neq y)$

خلاصة :  $(F, \times)$  زمرة غير تبادلية.

2

لدينا  $G$  جزء غير فارغ من  $F$  لأنها تضم العنصر  $M(1,0)$  على الأقل

لتكن  $M(a, 0)$  و  $M(b, 0)$  مصفوفتين من  $G$

$$M(b, 0) \times (M(a, 0))' = M(b, 0) \times M\left(\frac{1}{a}, 0\right) \quad \text{لدينا :}$$

$$= M\left(\frac{b}{a}; 0\right)$$

لدينا  $a \neq 0$  إذن  $\frac{b}{a} \neq 0$  و منه :  $M\left(\frac{b}{a}, 0\right) \in G$

و بالتالي :  $(G, \times)$  زمرة جزئية للزمرة  $(F, \times)$ .

3 أ

$$(1,1) \perp (2,3) = \left(2 ; 3 + \frac{1}{2}\right) = \left(2 ; \frac{7}{2}\right)$$

$$(2,3) \perp (1,1) = \left(2 ; 2 + \frac{3}{1}\right) = (2, 5)$$

3 ب

لتكن  $M(a, b)$  و  $M(c, d)$  مصفوفتين من  $F$

$$\varphi(M(c, d) \times M(a, b)) = \varphi\left(M\left(ac ; bc + \frac{d}{a}\right)\right) \quad \text{لدينا :}$$

$$= \left(ac ; bc + \frac{d}{a}\right)$$

$$= (c, d) \perp (a, b)$$

$$= \varphi(M(c, d)) \perp \varphi(M(a, b))$$

إذن  $\varphi$  تشاكل من  $(F, \times)$  نحو  $(E, \perp)$ .

ليكن  $(a, b)$  عنصراً من  $E$ .

نريد حل المعادلة ذات المجهول  $M(x, y)$  التالية :  $\varphi(M(x, y)) = (a, b)$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (a, b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \sqrt[4]{2} \left( \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}+4}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}} \right) \\ m_2 = \sqrt[4]{2} \left( -\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}+4}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}} \right) \end{cases}$$

■ (I) ②

في هذا السؤال يجب ضبط جميع قواعد الصيغ المثلثية .

$$z_1 = re^{i\varphi} \quad \text{نضع}$$

$$z_1 = 1 - im \quad \text{لدينا}$$

$$\begin{aligned} &= 1 - ie^{i\theta} \\ &= 1 - i(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= (1 + \sin \theta) - i \cos \theta \end{aligned}$$

إذن هدفنا هو إيجاد المجهولين  $r$  و  $\varphi$  بدلالة  $\theta$  بحيث :

$$(1 + \sin \theta) - i \cos \theta = r \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r \cos \varphi = 1 + \sin \theta \\ r \sin \varphi = -\cos \theta \end{cases}$$

$$(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 = r^2 \quad \text{لدينا}$$

$$(1 + \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta = r^2 \quad \text{إذن}$$

$$r^2 = 2(1 + \sin \theta) = 2 \left( \sin \frac{\pi}{2} + \sin \theta \right) \quad \text{و منه}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \left( 2 \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right) \\ &= 4 \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \\ &= 4 \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

$$r = 2 \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \quad \text{إذن}$$

نعوض  $r$  بقيمته في المعادلة الثانية من النظمة نحصل على :

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{-\cos \theta}{2 \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)} \\ &= \frac{\cos(\pi - \theta)}{2 \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)} \\ &= \frac{\sin \left( \frac{-\pi}{2} + \theta \right)}{2 \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)} \\ &= \frac{-\sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right)}{2 \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$

إذن المعادلة تقبل حلا وحيدا و هو  $M(x, y)$

ومنه :  $\forall (a, b) \in E, \exists ! M(x, y) \in F ; \varphi(M(x, y)) = (a, b)$

و بالتالي :  $\varphi$  تقابل من  $(F, \times)$  نحو  $(E, \perp)$

• خلاصة :  $\varphi$  تشاكل تقابلي من  $(F, \times)$  نحو  $(E, \perp)$

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة .

بما أن :  $(F, \times)$  زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد هو المصفوفة  $M(1,0)$

و كل مصفوفة  $M(x, y)$  تقبل مماثلة  $M\left(\frac{1}{x}, -y\right)$  بالنسبة لـ  $\times$  في  $F$  .

فإن :  $(E, \perp)$  زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد هو الزوج  $\varphi(M(1,0))$

و كل زوج  $(x, y)$  يقبل مماثلا  $\varphi\left(M\left(\frac{1}{x}, -y\right)\right)$

$$\begin{cases} \varphi(M(1,0)) = (1,0) \\ \varphi\left(M\left(\frac{1}{x}, -y\right)\right) = \left(\frac{1}{x}, -y\right) \end{cases} \quad \text{و لدينا}$$

التمرين الثاني : (4,0 ن)

■ (I) ① ا

$$\Delta = (1 - i)^2(m + 1)^2 + 4i(m^2 + 1)$$

$$\begin{aligned} &= -2i(m^2 + 2m + 1) + 4im^2 + 4i \\ &= 2im^2 - 4im + 2i \\ &= 2i(m^2 - 2m + 1) \\ &= (1 + i)^2(m - 1)^2 \end{aligned}$$

■ (I) ① ب

$$z_1 = (1 - im) \quad \text{و} \quad z_2 = (m - i)$$

■ (I) ① ج

$$\text{نضع} : m = re^{i\theta} \quad \text{و ننطلق من} : z_1 z_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (1 - im)(m - i) = 1$$

$$\Leftrightarrow m - i - m^2 i - m = 1$$

$$\Leftrightarrow m^2 = -1 + i$$

$$\Leftrightarrow r^2 e^{2i\theta} = \sqrt{2} \left( \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)$$

$$\Leftrightarrow r^2 e^{2i\theta} = \sqrt{2} e^{\frac{3i\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{3\pi}{8} + k\pi ; k \in \{0,1\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[4]{2} \\ \theta = \frac{3\pi}{8} \quad \text{أو} \quad \theta = \frac{11\pi}{8} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{3i\pi}{8}} \\ m_2 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{11i\pi}{8}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{-\cos(\pi - \theta)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{-\sin\left(\frac{-\pi}{2} + \theta\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{-2 \sin\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \cos \varphi = \cos\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\varphi \equiv \left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) [k\pi] \quad \text{إذن :}$$

$$z_2 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{و بالتالي :}$$

■ (II) ①

$$\begin{aligned} M \text{ و } M_1 \text{ و } M_2 \text{ نقط مستقيمة.} & \Leftrightarrow M \in (M_1 M_2) \\ & \Leftrightarrow \frac{z_1 - m}{z_2 - m} \in \mathbb{R} \\ & \Leftrightarrow \frac{1 - im - m}{m - i - m} \in \mathbb{R} \\ & \Leftrightarrow i + m - im \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{نضع : } m = x + iy$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow (x + y) + i(y - x + 1) \in \mathbb{R} \\ & \Leftrightarrow y - x + 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow y = x - 1 \end{aligned}$$

إذن مجموعة النقط  $M$  تشكل مستقيما معادلته  $y = x - 1$ .

■ (II) ② (i)

$$\text{ننطلق من } z' = 1 - iz$$

نريد كتابة هذه المتساوية على شكل :

$$z' = e^{i\theta} (z - \omega) + \omega \quad \text{بحيث } \omega \text{ عدد عقدي.}$$

$$\begin{cases} e^{i\theta} = -i \\ -\omega e^{i\theta} + \omega = 1 \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{aligned} & = \frac{-2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \\ & = \frac{-2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \\ & = -\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\varphi \equiv \left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) [k\pi] \quad \text{إذن :}$$

$$z_1 = \left(2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right) e^{i\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{و بالتالي :}$$

$$z_2 = r e^{i\varphi} \quad \text{بنفس الطريقة نضع :}$$

$$z_2 = m - i = e^{i\theta} - i = \cos \theta + i(\sin \theta - 1)$$

هدفنا هو البحث عن  $r$  و  $\varphi$  بدلالة  $\theta$  بحيث :

$$r \cos \varphi + i r \sin \varphi = \cos \theta + i(\sin \theta - 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = r \cos \varphi \\ \sin \theta - 1 = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 = r^2 \quad \text{لدينا :}$$

$$(\cos \theta)^2 + (\sin \theta - 1)^2 = r^2 \quad \text{إذن :}$$

$$r^2 = 2(1 - \sin \theta) \quad \text{و منه :}$$

$$r^2 = 2(1 + \sin(-\theta)) \quad \text{أي :}$$

نعلم حسب الجزء الأول من هذا السؤال أن :

$$2(1 + \sin \theta) = 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$$

$$2(1 + \sin(-\theta)) = 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \quad \text{إذن :}$$

$$r^2 = 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \quad \text{يعني :}$$

$$r = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \quad \text{و منه :}$$

ملاحظة : لقد تم اختيار القيمة الموجبة لـ  $r$  لأن معيار عدد عقدي

يكون دائما عددا موجبا.

نعرض  $r$  بقيمته في المعادلة الأولى من النظام نحصل على :

$$\cos \varphi = \frac{\cos \theta}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}$$

من (3) و (2) نحصل على :  $(4) \quad 3^n(1+2^n) \equiv 1[2]$

و من (1) و (4) نحصل على :  $(2^n - 1) + 3^n(1+2^n) \equiv 2[2]$

يعني :  $2^n(1+3^n) \equiv 0[2]$  لأن :  $2 \equiv 0[2]$

ومنه :  $a_n \equiv 0[2]$

و بالتالي :  $a_n$  عدد زوجي كيفما كان العدد الصحيح الطبيعي  $n$ .

■ (1) (ب)

لدينا :  $a_n = 2^n + 3^n + 3^n 2^n - 1$

يعني :  $a_n = 2^n(3^n + 1) + (3^n - 1)$

نعلم أن :  $3 \equiv 0[3]$  إذن :  $3^n \equiv 0[3]$

ومنه : (6)  $(3^n + 1) \equiv 1[3]$  و (5)  $(3^n - 1) \equiv -1[3]$

من (5) و (6) نحصل على :  $2^n(3^n + 1) + (3^n - 1) \equiv 2^n - 1[3]$

يعني : (7)  $a_n \equiv (2^n - 1)[3]$

و لدينا في الأخير :  $2 \equiv -1[3]$  إذن :  $2^n \equiv (-1)^n[3]$

أي : (8)  $(2^n - 1) \equiv ((-1)^n - 1)[3]$

من المتوافقين (7) و (8) نستنتج أن :  $a_n \equiv (-1)^n - 1[3]$

من أجل  $n$  عدد زوجي نحصل على :  $(-1)^{2k} - 1 = 0$

أي :  $a_n \equiv 0[3]$

من أجل  $n$  عدد فردي نحصل على :  $(-1)^{2k+1} - 1 = -2$

ومنه :  $a_n \equiv -2[3]$

■ (2) (أ)

بتطبيق مبرهنة (Fermat) مرتين نحصل على :

$$\begin{cases} p \text{ أولي} \\ p \wedge 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2^{p-1} \equiv 1[p] \quad (1)$$

و

$$\begin{cases} p \text{ أولي} \\ p \wedge 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow 3^{p-1} \equiv 1[p] \quad (2)$$

نضرب المتوافقين (1) و (2) طرفاً بطرف نحصل على :

$$3^{p-1} \cdot 2^{p-1} \equiv 1[p]$$

يعني :  $6^{p-1} \equiv 1[p]$

$$\begin{cases} \theta = \frac{-\pi}{2} \\ \omega = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

$$z' = e^{\frac{-\pi i}{2}} \left( z - \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right)$$

إذن التحويل  $R$  عبارة عن دوران مركزه النقطة  $\Omega \left( \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right)$  و زاويته  $\frac{-\pi}{2}$

■ (II) (2) (ب)

نضع :  $m = x + iy$  و  $\Re(m) = x$  و  $\Im(m) = y$

$$\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \Leftrightarrow \frac{\overline{z_2 - z_1}}{\overline{z_2 - m}} = - \frac{(z_2 - z_1)}{(z_2 - m)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{m} + i - 1 - i\bar{m}}{i} = \frac{m - i - 1 + im}{i}$$

$$\Leftrightarrow (x - iy) + i - 1 - i(x - iy) = (x + iy) - i - 1 + i(x + iy)$$

$$\Leftrightarrow -2ix + 2i - 2iy = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y = 1$$

$$\Leftrightarrow \Re(m) + \Im(m) + 1$$

■ (II) (2) (ج)

ننطلق من كون النقط  $\Omega$  و  $M$  و  $M_1$  و  $M_2$  متداورة

$$\Leftrightarrow \arg \left( \frac{z_2 - z_1}{z_2 - m} \right) \equiv \arg \left( \frac{z_2 - z_\Omega}{z_1 - z_\Omega} \right) [\pi]$$

$$\left( \frac{z_2 - z_\Omega}{z_1 - z_\Omega} \right) = \frac{-i \left( \frac{1}{2} - \frac{i}{2} - m \right)}{\left( \frac{1}{2} - \frac{i}{2} - m \right)} = -i$$

لدينا :  $\frac{z_2 - z_\Omega}{z_1 - z_\Omega}$  عدد تخيلي صرف.

ومنه :  $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$  عدد تخيلي صرف كذلك.

$$\Leftrightarrow \Re(m) + \Im(m) = 1$$

$$\Leftrightarrow y = -x + 1$$

إذن مجموعة النقط  $M$  التي من أجلها  $\Omega$  و  $M$  و  $M_1$  و  $M_2$  متداورة

تُشكّل المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته :  $(\Delta) : y = -x + 1$

التمرين الثالث : (3,3 ن)

■ (1) (أ)

لدينا :  $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

$$= (2^n - 1) + 3^n(1 + 2^n)$$

لدينا :  $2 \equiv 0[2]$  و  $3 \equiv 1[2]$

إذن :  $2^n \equiv 0[2]$  و  $3^n \equiv 1[2]$

ومنه : (3)  $3^n \equiv 1[2]$  و (1)  $\begin{cases} 2^n - 1 \equiv 1[2] \\ 2^n + 1 \equiv 1[2] \end{cases}$

1 (أ) ■

نضع :  $x = t^n$  إذن :  $\ln x = n \ln t$

ومنه :  $t = e^{\left(\frac{\ln x}{n}\right)}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x(1 - \ln x)^n \quad \text{لدينا} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} t^n (1 - n \ln t)^n \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \underbrace{t}_{\rightarrow 0} - \underbrace{nt \ln t}_{\rightarrow 0} \right)^n = 0 = f_n(0) \end{aligned}$$

إذن دالة متصلة على يمين الصفر.

1 (ب) ■

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \ln x)^n = +\infty \notin \mathbb{R}$$

إذن  $f_n$  غير قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر.

1 (ج) ■

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f_2(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f_1(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x) = -\infty$$

2 (أ) ■

لدينا :  $f_1(x) = x(1 - \ln x)$

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= (x - x \ln x)' \quad \text{إذن} \\ &= 1 - (\ln x + 1) \\ &= -\ln x \end{aligned}$$

ومنه :  $f_1'$  تنعدم في العدد 1

إذا كان :  $x > 1$  فإن :  $f_1'(x) < 0$

إذا كان :  $x < 1$  فإن :  $f_1'(x) > 0$

2 (II) (ب) ■

لدينا :  $2^{p-1} \equiv 1[p]$  إذن :  $3 \cdot 2^{p-1} \equiv 3[p]$  (1)

ولدينا :  $3^{p-1} \equiv 1[p]$  إذن :  $2 \cdot 3^{p-1} \equiv 2[p]$  (2)

ولدينا :  $6^{p-1} \equiv 1[p]$  إذن :  $6 \cdot 6^{p-2} \equiv 1[p]$  (3)

ولدينا :  $-6 \equiv -6[p]$  (4)

نجمع المتوافقات (1) و (2) و (3) و (4) طرفاً بطرف نحصل على :

$$3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6 \cdot 6^{p-2} - 6 \equiv 0[p]$$

$$\Leftrightarrow 6 \cdot 2^{p-2} + 6 \cdot 3^{p-2} + 6 \cdot 6^{p-2} - 6 \equiv 0[p]$$

$$\Leftrightarrow 6(2^{p-1} + 3^{p-1} + 6^{p-2} - 1) \equiv 0[p]$$

$$\Leftrightarrow 6(a_{p-2}) \equiv 0[p]$$

$$\Leftrightarrow p / 6(a_{p-2}) \quad (5)$$

نُفكك العدد 6 إلى جداء عوامل أولية نجد :  $6 = 2^1 \times 3^1$

ولدينا  $p$  عدد أولي أكبر من 3 إذن :  $6 \wedge p = 1$  (6)

من (5) و (6) نستنتج حسب (Gauss) :  $p / a_{p-2}$

2 (II) (ج) ■

ليكن  $q$  عدداً أولياً .

نفصل في هذا السؤال بين ثلاث حالات للعدد  $q$  :

الحالة الأولى : إذا كان  $q = 2$

فإنه حسب نتيجة السؤال (1) (أ) :  $2 / a_n$  :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

إذن :  $(\exists n \in \mathbb{N}^*) : a_n \wedge q = q$

الحالة الثانية : إذا كان  $q = 3$

فإنه حسب نتيجة السؤال (1) (ب) :  $3 / a_n$  :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

إذن :  $(\exists n \in \mathbb{N}^*) : a_n \wedge q = q$

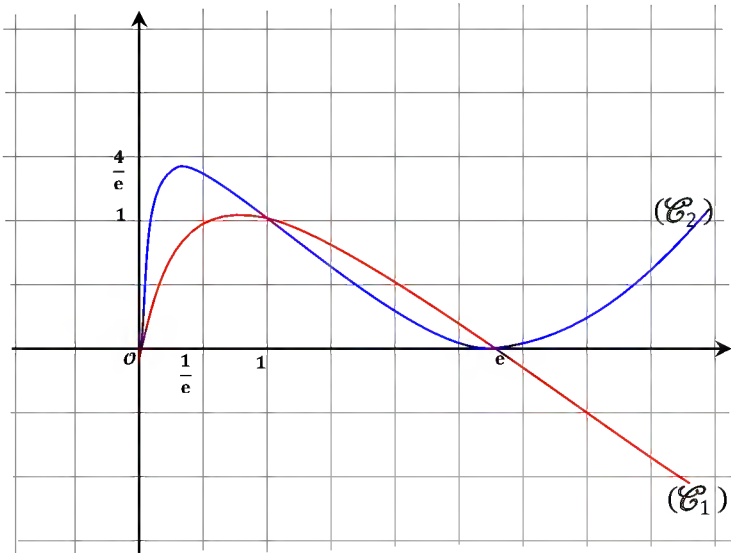
الحالة الثالثة : إذا كان  $q > 3$

رأينا في السؤال (2) (ب) أن :  $q / a_{q-2}$  ;  $(\forall q > 3)$

إذن :  $(\exists n \in \mathbb{N}^*) : a_n \wedge q = q$

خلاصة : نستنتج من هذه الحالات الثلاث أن :

$$(\forall q \in \mathbb{P}), (\exists n \in \mathbb{N}^*) : a_n \wedge q = q$$



الجزء الثاني

① ①

لدينا الدالة  $x \rightarrow \frac{f_1(x)}{1+x^2}$  متصلة على  $]0, +\infty[$

إذن فهي تقبل دالة أصلية  $\psi$  بحيث :

$$F(x) = \psi(1) - \psi(e^x) \quad \text{و} \quad \psi'(x) = \frac{f_1(x)}{(1+x^2)}$$

إذن  $F$  قابلة للإشتقاق على  $] -\infty; 0[$ .

$$\begin{aligned} F'(x) &= (\psi(1))' - (\psi(e^x))' && \text{و لدينا :} \\ &= 0 - e^x \psi'(e^x) \\ &= \frac{-e^x f_1(e^x)}{1+e^{2x}} \\ &= \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}} \end{aligned}$$

① ①

لدينا :  $(\forall x < 0) ; F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$

و بما أن :  $(\forall x < 0) ; \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} > 0$

فإن إشارة  $F'(x)$  متعلقة فقط بإشارة  $(x-1)$

و لدينا :  $x < 1 \Leftrightarrow x < 0$

و منه :  $x - 1 < 0$

و بالتالي :  $F'(x) < 0$  يعني  $F$  دالة تناقصية على المجال  $] -\infty; 0[$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة  $f_1$  كما يلي :

$x$	0	1	$e$	$+\infty$
$f_1'(x)$	+	0	-	-
$f_1$	0	1	0	$-\infty$

② ②

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= (x(1-\ln x)^2)' \\ &= (1-\ln x)^2 - \frac{2x}{x}(1-\ln x) \\ &= (1-\ln x)^2 - 2(1-\ln x) \\ &= (1-\ln x)(1-\ln x-2) \\ &= (1-\ln x)(-1-\ln x) \end{aligned}$$

نلاحظ أن  $f_2'$  تنعدم في  $\frac{1}{e}$  و  $e$ .

$x$	0	$\frac{1}{e}$	$e$	$+\infty$
$1-\ln x$	+	0	+	-
$-1-\ln x$	+	0	-	-
$f_2'(x)$	+	0	0	+
$f_2$	0	$\frac{4}{e}$	0	$+\infty$

③ ③

$$\begin{aligned} f_1(x) - f_2(x) & \text{ لدينا :} \\ &= x(1-\ln x) - x(1-\ln x)^2 \\ &= x(1-\ln x)(\ln x) \end{aligned}$$

$x$	0	1	$e$	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+	+
$(1-\ln x)$	+	+	0	-
$x(1-\ln x)\ln x$	-	0	+	-

إذن  $(\mathcal{E}_1)$  يوجد فوق  $(\mathcal{E}_2)$  على المجال  $[1; e]$ .

و  $(\mathcal{E}_1)$  يوجد أسفل  $(\mathcal{E}_2)$  على المجالين  $]0; 1[$  و  $[e; +\infty[$ .



1 1

ليكن  $1 \leq x \leq e$  و  $n \geq 1$

إذن :  $0 \leq \ln x \leq 1$  ومنه :  $(1 - \ln x) \geq 0$

أي :  $x(1 - \ln x)^n \geq 0$  وبالتالي :  $\int_1^e f_n(x) dx \geq 0$

أي :  $u_n \geq 0$

2 1

لدينا :  $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

$$= x(1 - \ln x)^{n+1} - x(1 - \ln x)^n$$

$$= x(1 - \ln x)^n (-\ln x)$$

و بما أن :  $1 \leq x \leq e$  فإن :  $(1 - \ln x) \geq 0$  و  $-\ln x \leq 0$

ومنه :  $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$  أي :  $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

3 1

بما أن :  $\forall x \in [1, e] ; f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

فإن :  $\int_1^e f_{n+1}(x) dx \leq \int_1^e f_n(x) dx$

ومنه :  $u_{n+1} \leq u_n$

4 1

لدينا :  $u_{n+1} \leq u_n$  إذن :  $(u_n)_{n \geq 1}$  متتالية تناقصية.

ولدينا :  $u_n \geq 0$  ;  $(\forall n \geq 1)$  إذن :  $(u_n)_{n \geq 1}$  مصغرة بـ 0

و بالتالي :  $(u_n)_{n \geq 1}$  متتالية متقاربة.

1 2

لدينا :  $u_{n+1} = \int_1^e f_{n+1}(x) dx = \int_1^e \frac{x}{u'} \frac{(1 - \ln x)^{n+1}}{v} dx$

$$= \left[ \frac{x^2}{2} (1 - \ln x)^{n+1} \right]_1^e - \frac{(n+1)}{2} \int_1^e x^2 \left( \frac{-1}{x} \right) (1 - \ln x)^n dx$$

$$= \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2} \int_1^e x(1 - \ln x)^n dx$$

$$= \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2} u_n$$

و بالتالي :  $(\forall n \geq 1) ; u_{n+1} = \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2} u_n$

1 2

ليكن  $t \in [e^x; 1]$  بحيث :  $x < 0$

يعني :  $e^x < t < 1$

ومنه :  $1 + e^{2x} < 1 + t^2 < 2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{1+t^2} < \frac{1}{1+e^{2x}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} f_1(t) < \frac{f_1(t)}{1+t^2} < \frac{f_1(t)}{1+e^{2x}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt < \int_{e^x}^1 \left( \frac{f_1(t)}{1+t^2} \right) dt < \int_{e^x}^1 \left( \frac{f_1(t)}{1+e^{2x}} \right) dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt < F(x) < \frac{1}{(1+e^{2x})} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt (*)$$

2 2

$$\begin{aligned} \left( x^2 \left( \frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right) \right)' &= 2x \left( \frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right) + x^2 \left( \frac{-1}{2x} \right) \\ &= \frac{3x}{2} - x \ln x - \frac{x}{2} \\ &= x(1 - \ln x)^1 \\ &= f_1(x) \end{aligned}$$

إذن الدالة  $x \rightarrow x^2 \left( \frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right)$  دالة أصلية للدالة  $f_1$  على  $]0; +\infty[$ .

3 2

$$\begin{aligned} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt &= \left[ x^2 \left( \frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right) \right]_{e^x}^1 \\ &= \frac{3}{4} - e^{2x} \left( \frac{3}{4} - \frac{x}{2} \right) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{3e^{2x}}{4} + \frac{xe^{2x}}{2} \end{aligned}$$

بما أن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{2x} = 0^- = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0^+ = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3}{4} - \frac{3e^{2x}}{4} + \frac{xe^{2x}}{2} \right) = \frac{3}{4}$$

3

نعود إلى التأيير (\*).

$$\frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt < F(x) < \frac{1}{(1+e^{2x})} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \right) < \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) < \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{(1+e^{2x})} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{8} < l < \frac{3}{4}$$

■ (3) ب

لدينا حسب التآطير (3) :

$$(\forall n \geq 2) ; \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$$

$$\Leftrightarrow (\forall n \geq 2) ; \frac{n}{n+1} \leq nu_n \leq \frac{n}{n-1}$$

$$\Leftrightarrow (\forall n \geq 2) ; \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \leq nu_n \leq \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n-1} \right) = 0 \quad \text{لدينا :}$$

إذن حسب التآطير (3) نستنتج :  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+\frac{1}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n-\frac{1}{n}} \right) = 1 \quad \text{ولدينا :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 1 \quad \text{إذن حسب التآطير (4) :}$$

■ (4) ا

ليكن  $n \geq 1$

في البداية لدينا :  $d_n = |v_n - u_n|$

$$= \left| \frac{-1}{2} + \frac{n}{2}v_{n-1} + \frac{1}{2} - \frac{n}{2}u_{n-1} \right|$$

$$= \frac{n}{2} |v_{n-1} - u_{n-1}|$$

$$|v_n - u_n| = \frac{n}{2} |v_{n-1} - u_{n-1}| \quad \text{إذن :}$$

$$= \left( \frac{n}{2} \right) \left( \frac{n-1}{2} \right) |v_{n-2} - u_{n-2}|$$

$$= \left( \frac{n}{2} \right) \left( \frac{n-1}{2} \right) \left( \frac{n-2}{2} \right) |v_{n-3} - u_{n-3}|$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$= \left( \frac{n}{2} \right) \left( \frac{n-1}{2} \right) \left( \frac{n-2}{2} \right) \dots \left( \frac{2}{2} \right) |v_1 - u_1|$$

$$(\forall n \geq 1) ; d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1 \quad \text{و بالتالي :}$$

■ (4) ب

$$(\forall n \geq 2) ; \frac{n!}{2} \geq 3^{n-2} \quad \text{لنبرهن على أن :}$$

$$\frac{2!}{2} \geq 3^0 : n = 2 \quad \text{بالتراجع لدينا من أجل } n = 2$$

$$(\forall n \geq 2) ; \frac{n!}{2} \geq 3^{n-2} \quad \text{نفترض أن :}$$

$$\frac{(n+1)!}{2} = (n+1) \frac{n!}{2} \geq (n+1) 3^{n-2} \quad \text{لدينا :}$$

$$(n+1) \geq 3 \quad \text{بما أن } n \geq 2 \quad \text{فإن :}$$

$$(n+1) 3^{n-2} \geq 3^{n-1} \quad \text{ومنه : } (n+1) 3^{n-2} \geq 3 \cdot 3^{n-2}$$

■ (2) ب

الحيز  $S$  الذي طلب منا حساب مساحته مُعرف بما يلي :

$$S = \left| \int_1^e (f_2(x) - f_1(x)) dx \right|$$

$$= \left| \int_1^e f_2(x) dx - \int_1^e f_1(x) dx \right|$$

$$= |u_1 - u_2|$$

$$u_{n+1} = \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2} u_n \quad \text{ولدينا :}$$

$$u_0 = \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \quad \text{إذن :}$$

$$u_1 = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4}$$

$$u_2 = \frac{-1}{2} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} - \frac{5}{4}$$

و بالتالي :

$$S = |u_1 - u_2| = \left( \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} \right) - \left( \frac{e^2}{4} - \frac{5}{4} \right) = \frac{1}{2} (\text{unité})^2$$

$\| \vec{l} \| = \| \vec{j} \| = 2cm$  هي وحدة المعلم و بما أن :

$$\text{unité} = 2cm \quad \text{فإن :}$$

$$(\text{unité})^2 = 4cm^2 \quad \text{و منه :}$$

$$S = \frac{1}{2} (\text{unité})^2 = 2cm^2 \quad \text{و بالتالي :}$$

■ (3) ا

لدينا حسب ما سبق :  $0 \leq u_{n+1}$

$$0 \leq \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2} u_n \quad \text{إذن :}$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{(n+1)}{2} u_n \quad \text{ومنه :}$$

$$(1) \quad \frac{1}{(n+1)} \leq u_n \quad \text{أي :}$$

و لدينا كذلك :  $u_{n+1} \leq u_n$

$$\frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2} u_n \leq u_n \quad \text{إذن :}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2} + \frac{nu_n}{2} + \frac{u_n}{2} \leq u_n$$

$$\Leftrightarrow u_n \left( \frac{n+1-2}{2} \right) \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow u_n \left( \frac{n-1}{2} \right) \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow (\forall n \geq 2) \quad u_n \leq \frac{1}{n-1} \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$(3) \quad (\forall n \geq 2) ; \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$$



$$\frac{(n+1)!}{2} \geq 3^{(n+1)-2} \quad \text{إذن :}$$

$$(\forall n \geq 2) ; \frac{n!}{2} \geq 3^{n-2} \quad \text{و بالتالي :}$$

■ 4 ج

$$(\forall n \geq 2) ; \frac{n!}{2} \geq 3^{n-2} \quad \text{ننتقل من العلاقة :}$$

$$\Leftrightarrow n! \geq 3^{n-2} \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow n! \geq \frac{3^{n-2} \cdot 2^{n-1}}{2^{n-2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{2^{n-2}} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow d_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} d_1$$

بما أن :  $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$  متتالية هندسية أساسها العدد الموجب  $\frac{3}{2}$  و الأكبر من 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} = +\infty \quad \text{فإن :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = +\infty \quad \text{و منه :}$$

■ 4 د

$$d_n = |v_n - u_n| \quad \text{لدينا :}$$

نفترض أن  $(v_n)_{n \geq 1}$  متتالية متقاربة .

و نعلم أن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 2}$  متقاربة .

إذن :  $(d_n)_{n \geq 2}$  متقاربة

$$d_n \rightarrow +\infty \quad \text{لكن حسب السؤال 4 ج :}$$

و بالتالي من هذا التناقض نستنتج أن المتتالية  $(v_n)_{n \geq 1}$  متباعدة.

■ و الحمد لله رب العالمين ■