المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية
و التعليم العالي
و تكوين الأطر
و البحث العلمي

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2010

المادة :	الرياضيات		المعامل :	9
الشعبة :	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)		مدة الانجاز :	4 ساعات

التمرين الأول : (3,5 نقط) الجزءان I و II مستقلان فيما بينهما.

I. نزود المجموعة $I=\left]0,+\infty\right[$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي :

$$\left(\forall(a,b)\in I\times I\right)\ ;\ a*b=e^{\ln(a).\ln(b)}$$

1. بين أن القانون $*$ تبادلي وتجميعي في I. — 0,5
2. بين أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا ε في I يتم تحديده. — 0,25
3. أ- بين أن $\left(I\setminus\{1\},*\right)$ زمرة تبادلية. ($I\setminus\{1\}$ هي المجموعة I محرومة من 1) — 0,75

ب- بين أن $\left]1,+\infty\right[$ زمرة جزئية للزمرة $\left(I\setminus\{1\},*\right)$. — 0,25

4. نزود I بقانون التركيب الداخلي $\times$. ($\times$ هو الضرب في $\mathbb{R}$)

أ- بين أن القانون $*$ توزيعي بالنسبة للقانون $\times$. — 0,25

ب- بين أن $\left(I,\times,*\right)$ جسم تبادلي. — 0,5

II. نعتبر المصفوفة : $A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&-1&2\\-2&-2&0\end{pmatrix}$.

1. أحسب A^2 و A^3. — 0,5
2. استنتج أن المصفوفة A لا تقبل مقلوبا. — 0,5

التمرين الثاني : (3,5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

1. أ- حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي : $3+4i$. — 0,25

ب- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E):\ \ 4z^2-10iz-7-i=0$. — 0,5

2. ليكن a و b حلي المعادلة (E) حيث : $\Re e\,(a)<0$ والنقطتين A و B صورتي a و b على التوالي.

أ- تحقق أن : $\dfrac{b}{a}=1-i$. — 0,25

ب- استنتج أن المثلث AOB متساوي الساقين وقائم الزاوية في A. — 0,75

3. لتكن C نقطة لحقها c وتخالف النقطة A ولتكن D صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ولتكن L صورة النقطة D بالإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{AO}$.	
أ- حدد بدلالة c العدد العقدي d لحق النقطة D.	0,5
ب- حدد بدلالة c العدد العقدي ℓ لحق النقطة L.	0,5
جـ- حدد الكتابة الجبرية للعدد العقدي $\frac{\ell-c}{a-c}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACL.	0,75
التمرين الثالث : (3 نقط)	
1. حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية m بحيث : $m^2+1\equiv 0\ [5]$.	1
2. ليكن p عددا أوليا بحيث : $p=3+4k$ مع k عدد صحيح طبيعي. وليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث : $n^2+1\equiv 0\ [p]$.	
أ- تحقق أن : $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv -1\ [p]$.	0,25
ب- بين أن n و p أوليان فيما بينهما.	0,5
جـ- استنتج أن : $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv 1\ [p]$.	0,75
د- استنتج مما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي n يحقق: $n^2+1\equiv 0\ [p]$.	0,5
التمرين الرابع : (3 نقط)	
I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $\left[0,+\infty\right[$ بما يلي : $f(x)=4xe^{-x^2}$ وليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.	
1. أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.	0,5
2. أدرس تغيرات الدالة f على المجال $\left[0,+\infty\right[$ ثم ضع جدول تغيراتها.	0,75
3. حدد معادلة نصف المماس للمنحنى $(\mathscr{C})$ في أصل المعلم ثم أنشئ $(\mathscr{C})$. (نأخذ : $\left\lVert\vec{i}\right\rVert=\left\lVert\vec{j}\right\rVert = 2\ cm$ ونقبل أن النقطة التي أفصولها $\sqrt{\frac{3}{2}}$ نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathscr{C})$)	0,75
4. أحسب التكامل $a = \int_0^1 f(x)\,dx$ ثم استنتج بالسنتمتر المربع مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ ومحوري المعلم والمستقيم الذي معادلته $x=1$.	0,5
II. ليكن n عددا صحيحا طبيعيا لأكبر من أو يساوي 2 . نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $\left[0,+\infty\right[$ بما يلي : $f_n(x)=4x^ne^{-x^2}$.	
1. أ- بين أن : $(\forall x>1)\ ;\ e^{-x^2}<e^{-x}$.	0,25
ب- استنتج نهاية الدالة f_n عندما تؤول x إلى $+\infty$.	0,25

2. أدرس تغيرات الدالة f_n على المجال $[0,+\infty[$ ثم ضع جدول تغيراتها.	0,75
3. بين انه يوجد عدد حقيقي وحيد u_n من المجال $]0,1[$ بحيث : $f_n(u_n)=1$.	0,5
4. أ- تحقق أن : $f_{n+1}(u_n)=u_n \; ; (\forall n\geq 2)$.	0,25
ب- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ تزايدية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة.	0,75
5. نضع : $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.	
أ- بين أن : $0<\ell\leq 1$.	0,25
ب- بين أن : $-\dfrac{\ln(4)}{n}<\ln(u_n)<\dfrac{1}{n}-\dfrac{\ln(4)}{n} \; ; (\forall n\geq 2)$.	0,25
جـ- استنتج أن : $\ell=1$.	0,5
التمرين الخامس : (3,75 نقط)	
نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $F(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}\,dt$.	
1. بين أن الدالة F فردية.	0,25
2. لكل x من المجال $]0,+\infty[$ نضع : $\varphi(x)=\displaystyle\int_1^{x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}\,dt$.	
أ- تحقق أن : $F(x)=\varphi(2x)-\varphi(x) \; ; (\forall x>0)$.	0,25
ب- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ثم احسب $F'(x)$ من اجل $x>0$.	0,5
جـ- استنتج منحى تغيرات الدالة F على المجال $]0,+\infty[$.	0,5
3. أ- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية، بين أن : $(\forall x>0)\;(\exists c\in]x,2x[)\;:\;F(x)=\dfrac{x}{\ln(1+c^2)}$.	0,5
ب- استنتج أن : $(\forall x>0)\;:\;\dfrac{x}{\ln(1+4x^2)}<F(x)<\dfrac{x}{\ln(1+x^2)}$	0,25
جـ- حدد النهايات : $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$.	0,75
د- تحقق أن : $F\left(\dfrac{\sqrt{e}-1}{2}\right)>\dfrac{\sqrt{e}-1}{2}$ و $F\left(\sqrt{e}-1\right)<\sqrt{e}-1$، ثم استنتج أن المعادلة $F(x)=x$ تقبل حلا وحيدا في $]0,+\infty[$.	0,75

التمرين الأول :

I. نزود المجموعة $I = \left]0,+\infty\right[$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي :

$$\forall(a,b)\in I\times I \quad ; \quad a*b = e^{\ln(a).\ln(b)}$$

1. ليكن a و b عنصرين من المجموعة I. لدينا : $b*a = e^{\ln(b).\ln(a)} = e^{\ln(a).\ln(b)} = a*b$.

إذن : $\forall(a,b)\in I\times I \quad ; \quad a*b = b*a$ ، ومنه فإن $*$ قانون تبادلي في I.

ليكن a و b و c ثلاثة عناصر من المجموعة I. لدينا :

$$\begin{aligned}(a*b)*c &= e^{\ln(a*b).\ln(c)}\\ &= e^{\ln\left(e^{\ln(a).\ln(b)}\right).\ln(c)}\\ &= e^{\left(\ln(a).\ln(b)\right).\ln(c)}\\ &= e^{\ln(a).\left(\ln(b).\ln(c)\right)}\\ &= e^{\ln(a).\ln\left(e^{\ln(b).\ln(c)}\right)}\\ &= e^{\ln(a).\ln(b*c)}\end{aligned}$$

$$(a*b)*c = a*(b*c)$$

إذن : $(a*b)*c = a*(b*c) \quad ; \quad \forall(a,b,c)\in I^3$ ، وعليه فإن $*$ قانون تجميعي في I.

خلاصة : $*$ قانون تبادلي و تجميعي في I.

2. نبحث عن عنصر ε من المجموعة I بحيث : $a*\varepsilon = a \quad ; \quad \forall a\in I$. لدينا :

$$\begin{aligned}\forall a\in I \quad ; \quad a*\varepsilon = a &\Leftrightarrow \forall a\in I \quad ; \quad e^{\ln(a).\ln(\varepsilon)} = a\\ &\Leftrightarrow \forall a\in I \quad ; \quad \ln(a).\ln(\varepsilon) = \ln(a)\\ &\Leftrightarrow \ln(\varepsilon) = 1\\ &\Leftrightarrow \varepsilon = e\end{aligned}$$

وبما أن $*$ قانون تبادلي في I و $e\in I$ ، فإن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا $\varepsilon = e$ في I.

3. أ- لدينا :

✓ $I\setminus\{1\}=\left]0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[\neq\varnothing$.

✓ ليكن a و b عنصرين من $I\setminus\{1\}$. لدينا $*$ قانون تركيب داخلي في I ، إذن : $a*b\in I$ وبما أن

$$\begin{aligned} a*b=1 &\Leftrightarrow e^{\ln(a).\ln(b)}=1 \\ &\Leftrightarrow \ln(a).\ln(b)=0 \\ &\Leftrightarrow \ln(a)=0 \text{ أو } \ln(b)=0 \\ &\Leftrightarrow a=1 \text{ أو } b=1 \end{aligned}$$

فإن : $\forall(a,b)\in\left(I\setminus\{1\}\right)\times\left(I\setminus\{1\}\right)\quad;\quad a*b\in I\setminus\{1\}$ ، ومنه فإن $*$ قانون تركيب داخلي في $I\setminus\{1\}$.

✓ بما أن $*$ قانون تركيب داخلي في $I\setminus\{1\}$ و $I\setminus\{1\}\subset I$ و $*$ قانون تبادلي وتجميعي في I ، فإن $*$ قانون تبادلي وتجميعي في $I\setminus\{1\}$.

✓ لدينا e هو العنصر المحايد في $(I,*)$ و $e\in I\setminus\{1\}$. إذن e هو العنصر المحايد في $\left(I\setminus\{1\},*\right)$.

✓ ليكن $a\in I\setminus\{1\}$. نبحث عن $b\in I\setminus\{1\}$ بحيث $a*b=e$. لدينا :

$$\begin{aligned} a*b=e &\Leftrightarrow e^{\ln(a).\ln(b)}=e \\ &\Leftrightarrow \ln(a).\ln(b)=1 \\ &\Leftrightarrow \ln(b)=\frac{1}{\ln(a)} \quad \left(\text{لأن : } a\neq1 \text{ و } a>0\right) \end{aligned}$$

$$a*b=e \Leftrightarrow b=e^{\frac{1}{\ln(a)}}$$

ولدينا : $e^{\frac{1}{\ln(a)}}\in I\setminus\{1\}$.

وبما أن $*$ قانون تبادلي في $\left(I\setminus\{1\},*\right)$ ، فإن $b=e^{\frac{1}{\ln(a)}}$ هو مماثل كل عنصر a من $I\setminus\{1\}$ في $\left(I\setminus\{1\},*\right)$.

<u>خلاصة :</u> $\left(I\setminus\{1\},*\right)$ زمرة تبادلية.

ب- لدينا :

✓ $\left]1,+\infty\right[\neq\varnothing$ و $\left]1,+\infty\right[\subset I\setminus\{1\}$.

✓ ليكن a و b عنصرين من $\left]1,+\infty\right[$ ، وليكن b' مماثل b في $\left(I\setminus\{1\},*\right)$. لدينا :

$a*b'=a*e^{\frac{1}{\ln(b)}}=e^{\ln(a).\ln\left(e^{\frac{1}{\ln(b)}}\right)}=e^{\ln(a).\frac{1}{\ln(b)}}=e^{\frac{\ln(a)}{\ln(b)}}$. وبما أن : $a>1$ و $b>1$ ، فإن :

$\ln(a)>0$ و $\ln(b)>0$ ، إذن : $\frac{\ln(a)}{\ln(b)}>0$ ، وعليه فإن : $e^{\frac{\ln(a)}{\ln(b)}}>1$ أي $a*b'>1$.

وبالتالي فإن : $\forall(a,b)\in]1,+\infty[\times]1,+\infty[\;;\; a*b'\in]1,+\infty[$ ، حيث b' مماثل b في $(I\setminus\{1\},*)$.

<u>خلاصة :</u> $(]1,+\infty[,*)$ زمرة جزئية للزمرة $(I\setminus\{1\},*)$.

4. نزود I بقانون التركيب الداخلي $\times$. ($\times$ هو الضرب في $\mathbb{R}$)

أ- ليكن a و b و c ثلاثة عناصر من المجموعة I . لدينا :

$$\begin{aligned} a*(b\times c) &= e^{\ln(a).\ln(b\times c)} \\ &= e^{\ln(a).(\ln(b)+\ln(c))} \\ &= e^{\ln(a).\ln(b)+\ln(a).\ln(c)} \\ &= e^{\ln(a).\ln(b)}\times e^{\ln(a).\ln(c)} \\ a*(b\times c) &= (a*b)\times(a*c) \end{aligned}$$

إذن : $\forall(a,b,c)\in I^3\;;\; a*(b\times c)=(a*b)\times(a*c)$.

ولدينا $*$ و $\times$ قانونين تبادليين في I ، وبالتالي فإن $*$ قانون توزيعي بالنسبة للقانون $\times$ في I.

ب- نعلم أن : $(\mathbb{R},+,\times)$ جسم تبادلي . إذن : $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة تبادلية. بما أن :

- ✓ $I\neq\varnothing$ و $I\subset\mathbb{R}^*$.
- ✓ لكل a و b من I لدينا : $a\times b^{-1}=\frac{a}{b}>0$ ، إذن : $a\times b^{-1}=\frac{a}{b}\in I$.

فإن $(I,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{R}^*,\times)$. إذن $(I,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد 1.

ولدينا :

- ✓ $(I\setminus\{1\},*)$ زمرة تبادلية.
- ✓ $*$ قانون توزيعي بالنسبة للقانون $\times$ في I.

<u>خلاصة :</u> $(I,\times,*)$ جسم تبادلي.

II. نعتبر المصفوفة : $A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&-1&2\\-2&-2&0\end{pmatrix}$.

1. لدينا : $A^2=\begin{pmatrix}4&4&0\\-4&-4&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ و $A^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

2. نفترض أن المصفوفة A تقبل مقلوبا A^{-1} في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. لدينا : $\times$ تجميعي في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. إذن :

$$A^3=O\Rightarrow A^{-1}\times A^3=O$$

$$\Rightarrow A^2=O\qquad \left(\text{لأن : } A^{-1}\times A^3=\left(A^{-1}\times A\right)\times A^2=I\times A^2=A^2\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1}\times A^2=O$$

$$\Rightarrow A=O\qquad \left(\text{لأن : } A^{-1}\times A^2=\left(A^{-1}\times A\right)\times A=I\times A=A\right)$$

وهذا يتناقض مع كون $A\neq O$. إذن A لا تقبل مقلوبا A^{-1} في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

التمرين الثاني :

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

1. أ- لدينا : $3+4i=4+2\times2\times i-1=2^2+2\times2\times i+i^2=\left(2+i\right)^2$.

إذن : الجذرين المربعين للعدد العقدي $3+4i$ هما $2+i$ و $-2-i$.

ب- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $(E):\ 4z^2-10iz-7-i=0$. نحسب Δ' المميز المختصر للمعادلة (E):

$\Delta'=b'^2-ac=\left(-5i\right)^2-4\left(-7-i\right)=3+4i=\left(2+i\right)^2\neq0$. إذن $\sigma=2+i$ جذر مربع لـ Δ' ومنه فإن للمعادلة (E) حلين مختلفين هما :

$$z=\frac{-b'+\sigma}{a}=\frac{5i+2+i}{4}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\quad\text{أو}\quad z=\frac{-b'-\sigma}{a}=\frac{5i-2-i}{4}=-\frac{1}{2}+i$$

وبالتالي فإن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\left\{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\ ,\ -\frac{1}{2}+i\right\}$.

2. ليكن a و b حلي المعادلة (E) حيث : $\mathfrak{Re}(a)<0$. إذن : $a=-\frac{1}{2}+i$ و $b=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$. لتكن A و B على التوالي صورتي a و b في المستوى العقدي.

أ- لدينا : $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i}{-\frac{1}{2}+i}=\dfrac{\left(1+3i\right)\left(-1-2i\right)}{\left(-1+2i\right)\left(-1-2i\right)}=1-i$.

ب- لدينا : $\frac{b}{a}=1-i$. إذن : $\frac{b-a}{a}=-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

ومنه فإن : $\arg\left(\frac{b-a}{a}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ و $\left|\frac{b-a}{a}\right|=1$.

أي : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AB}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ و $AB=OA$.

ومنه نستنتج أن AOB مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في A .

3. لتكن C نقطة لحقها c وتخالف النقطة A ولتكن D صورة النقطة B بالدوران $R\left(C,\frac{\pi}{2}\right)$ الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ولتكن L صورة النقطة D بالإزاحة $t_{\overrightarrow{AO}}$ التي متجهتها $\overrightarrow{AO}$.

أ- لدينا : $R\left(C,\frac{\pi}{2}\right)(B)=D$.

إذن : $d=e^{i\frac{\pi}{2}}b+\left(1-e^{i\frac{\pi}{2}}\right)c=i\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)+(1-i)c=\boxed{(1-i)c-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i}$.

ب- لدينا : $t_{\overrightarrow{AO}}(D)=L$.

إذن: $l=d+(0-a)=(1-i)c-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}-i=\boxed{(1-i)c-1-\frac{1}{2}i}$.

جـ- نعلم أن : $l=d-a$ و $d-c=i(b-c)$ و $b=(1-i)a$. إذن :

$$\frac{l-c}{a-c}=\frac{d-a-c}{a-c}=\frac{d-c-a}{a-c}=\frac{i(b-c)-a}{a-c}=\frac{ib-ic-a}{a-c}=\frac{i(1-i)a-ic-a}{a-c}=\boxed{i}$$

أو : $\frac{l-c}{a-c}=\frac{(1-i)c-1-\frac{1}{2}i-c}{-\frac{1}{2}+i-c}=\frac{-ic-1-\frac{1}{2}i}{-\frac{1}{2}+i-c}=\frac{i\left(-\frac{1}{2}+i-c\right)}{-\frac{1}{2}+i-c}=i$.

إذن : $\arg\left(\frac{l-c}{a-c}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ و $\left|\frac{l-c}{a-c}\right|=1$ أي $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CL}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ و $CL=CA$

وبالتالي فإن ACL مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في C.

التمرين الثالث :

1. في المجموعة $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ، لدينا :

$\overline{m}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{m}^2$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$
$\overline{m}^2+\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$

إذن :

$$m^2+1\equiv 0[5] \Leftrightarrow \overline{m}^2+\overline{1}=\overline{0} \quad (\text{في } \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$$
$$\Leftrightarrow \overline{m}=\overline{2} \text{ أو } \overline{m}=\overline{3} \quad (\text{في } \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$$
$$\Leftrightarrow m\equiv 2[5] \text{ أو } m\equiv 3[5]$$

2. ليكن p عددا صحيحا أوليا بحيث : $p=3+4k$ مع k عدد صحيح طبيعي، وليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحي : $n^2+1\equiv 0[p]$.

أ- لدينا :

$$n^2+1\equiv 0[p] \Rightarrow n^2\equiv -1[p]$$
$$\Rightarrow \left(n^2\right)^{1+2k}\equiv(-1)^{1+2k}[p]$$
$$\Rightarrow \left(n^2\right)^{1+2k}\equiv -1[p]$$

ب- بما أن $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv -1[p]$ ، فإن : $\left(n^2\right)^{1+2k}=-1+up$ $\exists u\in\mathbb{Z}\quad/$. أي :
$\exists u\in\mathbb{Z}\quad/\quad up-n^{2+4k}=1$. ومنه فإن ، حسب مبرهنة بوزو ، لدينا : $n\wedge p=1$.

جـ بما أن p عدد صحيح أولي و $n\wedge p=1$ ، فإنه ، حسب مبرهنة فيرما ، لدينا : $n^{p-1}\equiv 1[p]$. وبما أن : $p=3+4k$ ، فإن : $n^{2+4k}\equiv 1[p]$. أي : $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv 1[p]$.

د- نفترض أنه يوجد عدد صحيح طبيعي n يحقق : $n^2+1\equiv 0[p]$.

لدينا : $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv -1[p]$ و $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv 1[p]$. إذن : $1\equiv -1[p]$. أي : $p/2$ ، وبما أن p و 2 عددان صحيحان أوليان فإن $p=2$. إذن : $2=3+4k$. أي : $4k=-1$. وهذا تناقض. ($k\in\mathbb{N}$ ....)
وبالتالي لا يوجد عدد صحيح طبيعي n يحقق : $n^2+1\equiv 0[p]$.

التمرين الرابع :

I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=4xe^{-x^2}$ ، وليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، حيث : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\| = 2\ cm$.

1. لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}4xe^{-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}x^2e^{-x^2}=0$. لأن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0$ و يوضع $t=-x^2$ ، نجد أن : $t\underset{x\to+\infty}{\to}-\infty$ وان : $\lim_{x\to+\infty}x^2e^{-x^2}=\lim_{t\to-\infty}-te^t=0$.

2. ليكن $x \in \left]0,+\infty\right[$. لدينا :

$$f'(x)=\left(4xe^{-x^2}\right)'=4\left(e^{-x^2}+x\left(-x^2\right)'e^{-x^2}\right)=\boxed{4\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}}.$$

إشارة $f'(x)$ على المجال $\left]0,+\infty\right[$ هي إشارة $1-2x^2$. ولكن $x>0$ ، لدينا : $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \iff 1-2x^2=0$، ومنه

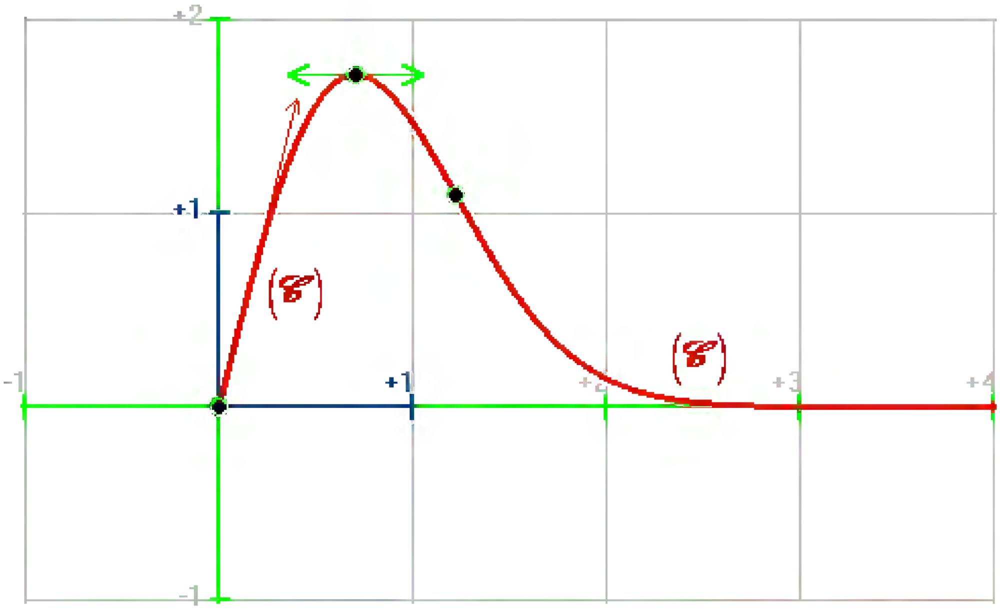
نستنتج جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}^+$:

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

3. لدينا : $f'_d(0)=4$. إذن معادلة نصف المماس للمنحنى $(\mathscr{C})$ في أصل المعلم هي :

$$\begin{cases} y=f'_d(0)(x-0)+f(0) \\ x\geq 0 \end{cases} \quad \text{أي :} \quad \begin{cases} y=4x \\ x\geq 0 \end{cases}.$$

إنشاء المنحنى $(\mathscr{C})$.



4. لدينا : $a=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 4xe^{-x^2}dx=-2\int_0^1 -2xe^{-x^2}dx=-2\left[e^{-x^2}\right]_0^1=\boxed{2\left(1-e^{-1}\right)}$.

مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ ومحوري المعلم والمستقيم الذي معادلته $x=1$ هي :

$$A=\int_0^1\left|f(x)\right|dx=\int_0^1 f(x)\,dx=2\left(1-e^{-1}\right)(u.a.)=8\left(1-e^{-1}\right)cm^2\approx 5,056964470\,cm^2$$

II. ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2 . نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $\left[0,+\infty\right[$ بما يلي :

$$f_n(x)=4x^n e^{-x^2}.$$

1. أ- ليكن $x>1$. لدينا : $x>1\Rightarrow x^2>x\Rightarrow -x^2<-x\Rightarrow e^{-x^2}<e^{-x}$.

إذن : $(\forall x>1)\ ;\ e^{-x^2}<e^{-x}$.

ب- ليكن $x>1$. لدينا : $0<e^{-x^2}<e^{-x}\Rightarrow 0<4x^n e^{-x^2}<4x^n e^{-x}$.

إذن : $(\forall x>1)\ ;\ 0<f(x)<4x^n e^{-x}$. بوضع $t=-\frac{1}{n}x$، لدينا : $t\underset{x\to+\infty}{\to}-\infty$ و

$$\lim_{x\to+\infty}4x^n e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}4\left(xe^{-\frac{1}{n}x}\right)^n=\lim_{t\to-\infty}4\left(-n\,te^t\right)^n=0$$ ، لأن : $\lim_{t\to-\infty}te^t=0$.

ولدينا : $\lim_{x\to+\infty}0=0$. إذن ، حسب قوانين الترتيب والنهايات ، لدينا : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0}$.

2. ليكن $x\in\left]0,+\infty\right[$. لدينا :

$$f'_n(x)=4\left(x^n e^{-x^2}\right)'=4\left(nx^{n-1}e^{-x^2}+x^n(-2x)e^{-x^2}\right)=\boxed{4x^{n-1}\left(n-2x^2\right)e^{-x^2}}.$$

ومنه فإن إشارة $f'_n(x)$ ، على $\left]0,+\infty\right[$ ، هي إشارة $n-2x^2$.

x	0		$\sqrt{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$4\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)^n e^{-\frac{n}{2}}$	$\searrow$	0

3. نعلم أن $n\geq 2$. إذن $\sqrt{\frac{n}{2}}\geq 1$. لدينا : f_n متصلة وتزايدية قطعا على المجال $\left]0,1\right[$. إذن : f_n تقابل من المجال $\left]0,1\right[$ نحو المجال $J_n=f_n\left(\left]0,1\right[\right)=\left]f_n(0),f_n(1)\right[=\left]0,\frac{4}{e}\right[$. وبما أن $1\in J_n$ ، فإن :

$$\exists!\ u_n\in\left]0,1\right[\quad/\quad f_n(u_n)=1.$$

4. أ- ليكن $n\geq 2$. لدينا : $f_n(u_n)=1\Rightarrow 4u_n^n e^{-u_n^2}=1\Rightarrow\boxed{e^{-u_n^2}=\frac{1}{4u_n^n}}$

إذن : $f_{n+1}(u_n)=4u_n^{n+1}e^{-u_n^2}=4u_n^{n+1}\frac{1}{4u_n^n}=u_n$

ب- ليكن $n\geq 2$. نعلم أن : $f_{n+1}(u_n)=u_n$ و $f_{n+1}(u_n)=u_{n+1}$ و $u_n\in\left]0,1\right[$. ولدينا : f_n متصلة وتزايدية قطعا على المجال $\left]0,1\right[$. إذن : f_n تقابل من المجال $\left]0,1\right[$ نحو المجال $J_n=\left]0,\frac{4}{e}\right[$. ومنه : f_n^{-1} تزايدية قطعا على المجال J_n. وبناء عليه فإن :

$$\begin{aligned} u_n<1 &\Rightarrow f_{n+1}(u_n)<f_{n+1}(u_{n+1}) \\ &\Rightarrow f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(u_n))<f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(u_{n+1})) \\ &\Rightarrow u_n<u_{n+1} \end{aligned}$$

وبالتالي فإن $(u_n)_{n\geq 2}$ متتالية تزايدية قطعا، وبما أنها مكبورة بالعدد 1 ، فإنها متقاربة.

5. نضع : $l=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

أ- نعلم أن : $(u_n)_{n\geq 2}$ متتالية تزايدية قطعا و $\forall n\geq 2\ ;\ u_n\in\left]0,1\right[$. إذن : $\forall n\geq 2\ ;\ u_2<u_n<1$.

إذن : $u_2\leq l\leq 1$. وبما أن : $u_2\in\left]0,1\right[$ ، فإن : $\boxed{0<l\leq 1}$.

ب- ليكن $n\geq 2$. نعلم أن : $u_n\in\left]0,1\right[$ و $4u_n^n=e^{u_n^2}$. إذن :

$$\begin{aligned} 0<u_n<1 &\Rightarrow 0<u_n^2<1 \\ &\Rightarrow 1<e^{u_n^2}<e \\ &\Rightarrow 1<4u_n^n<e \\ &\Rightarrow 0<\ln(4u_n^n)<1 \\ &\Rightarrow 0<\ln(4)+n\ln(u_n)<1 \\ &\Rightarrow -\frac{\ln(4)}{n}<\ln(u_n)<\frac{1}{n}-\frac{\ln(4)}{n} \end{aligned}$$

جـ- لدينا : $\forall n\geq 2\ ;\ -\frac{\ln(4)}{n}<\ln(u_n)<\frac{1}{n}-\frac{\ln(4)}{n}$.

بما أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{\ln(4)}{n}=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}-\frac{\ln(4)}{n}=0$ ، فإنه ، حسب قانون الدرك ، لدينا :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n)=0$ ، وحيث أن الدالة $\exp$ متصلة في 0 ، فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\ln(u_n)}=e^0=1$.

وبالتالي فإن : $\boxed{l=1}$.

التمرين الخامس :

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $F(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$.

1. لدينا : $D_F=\mathbb{R}^*$. إذن : $\forall x\in D_F\ ;\ -x\in D_F$.

ليكن $x\in\mathbb{R}^*$. نضع $t=-u$. لدينا : $t=-x\Leftrightarrow u=x$ و $t=-2x\Leftrightarrow u=2x$ و $dt=-du$.

باستعمال تقنية المكاملة بتغيير المتغير ، لدينا :

$$F(-x)=\int_{-x}^{-2x}\frac{1}{\ln\left(1+t^2\right)}dt=\int_{x}^{2x}\frac{1}{\ln\left(1+u^2\right)}(-du)=-\int_{x}^{2x}\frac{1}{\ln\left(1+u^2\right)}du=-F(x)$$

إذن : F دالة فردية.

2. نضع : $\forall x\in\left]0,+\infty\right[\ ;\ \varphi(x)=\int_{1}^{x}\frac{1}{\ln\left(1+t^2\right)}dt$. φ هي الدالة الأصلية للدالة $t\mapsto\frac{1}{\ln\left(1+t^2\right)}$ على المجال $\left]0,+\infty\right[$ والتي تنعدم في 1 (حيث أن $t\mapsto\frac{1}{\ln\left(1+t^2\right)}$ دالة متصلة على المجال $\left]0,+\infty\right[$) .

أ- ليكن $x>0$. لدينا :

$$\begin{aligned}\varphi(2x)-\varphi(x)&=\int_{1}^{2x}\frac{1}{\ln\left(1+t^2\right)}dt-\int_{1}^{x}\frac{1}{\ln\left(1+t^2\right)}dt\\&=\int_{1}^{2x}\frac{1}{\ln\left(1+t^2\right)}dt+\int_{x}^{1}\frac{1}{\ln\left(1+t^2\right)}dt\\&=\int_{x}^{2x}\frac{1}{\ln\left(1+t^2\right)}dt\\&=F(x)\end{aligned}$$

ب- لدينا : φ و $x\mapsto 2x$ دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $\left]0,+\infty\right[$ و $\forall x>0\ ;\ 2x>0$ ، إذن : $x\mapsto\varphi(2x)$ دالة قابلة للاشتقاق على المجال $\left]0,+\infty\right[$ ، ومنه فإن : F دالة قابلة للاشتقاق على المجال $\left]0,+\infty\right[$.

ليكن $x>0$. لدينا :

$$F'(x)=\left(\varphi(2x)-\varphi(x)\right)'=2\varphi'(2x)-\varphi'(x)=\boxed{\frac{2}{\ln\left(1+4x^2\right)}-\frac{1}{\ln\left(1+x^2\right)}}.$$

جـ- ليكن $x>0$ لدينا :

$$F'(x)=\frac{2}{\ln\left(1+4x^2\right)}-\frac{1}{\ln\left(1+x^2\right)}=\frac{\ln\left(\left(1+x^2\right)^2\right)-\ln\left(1+4x^2\right)}{\ln\left(1+4x^2\right).\ln\left(1+x^2\right)}.$$

و لدينا : $x>0\Rightarrow\begin{cases}1+x^2>1\\1+4x^2>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ln\left(1+x^2\right)>0\\\ln\left(1+4x^2\right)>0\end{cases}$ ،

و بما أن : $\left(1+x^2\right)^2-\left(1+4x^2\right)=x^2\left(x^2-2\right)=x^2\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$ ، فإن :

$$x>\sqrt{2}\Rightarrow\left(1+x^2\right)^2>1+4x^2$$
$$\Rightarrow\ln\left(\left(1+x^2\right)^2\right)>\ln\left(1+4x^2\right)$$
$$\Rightarrow\ln\left(\left(1+x^2\right)^2\right)-\ln\left(1+4x^2\right)>0$$
$$\Rightarrow F'(x)>0$$

$$0<x<\sqrt{2}\Rightarrow\left(1+x^2\right)^2<1+4x^2$$
$$\Rightarrow\ln\left(\left(1+x^2\right)^2\right)<\ln\left(1+4x^2\right)$$
$$\Rightarrow\ln\left(\left(1+x^2\right)^2\right)-\ln\left(1+4x^2\right)<0$$
$$\Rightarrow F'(x)<0$$

وبالتالي فإن : F تزايدية قطعا على $\left[\sqrt{2},+\infty\right[$ وتناقصية قطعا على المجال $\left]0,\sqrt{2}\right]$.

3. أ- ليكن $x>0$. لدينا : φ دالة متصلة على المجال $\left[x,2x\right]$ وقابلة للاشتقاق على المجال $\left]x,2x\right[$. حسب مبرهنة التزايدات المنتهية ، لدينا : $\exists c\in\left]x,2x\right[\quad/\quad\dfrac{\varphi(2x)-\varphi(x)}{2x-x}=\varphi'(c)$.

أي : $\exists c\in\left]x,2x\right[\quad/\quad\dfrac{F(x)}{x}=\dfrac{1}{\ln\left(1+c^2\right)}$.

وبالتالي فإن :
$$\forall x>0\quad;\quad\exists c\in\left]x,2x\right[\quad/\quad F(x)=\frac{x}{\ln\left(1+c^2\right)}$$

ب- ليكن $x>0$. لدينا : $\exists c\in\left]x,2x\right[\quad/\quad F(x)=\dfrac{x}{\ln\left(1+c^2\right)}$. إذن :

$$0<x<c<2x\quad\Rightarrow\quad 1<1+x^2<1+c^2<1+4x^2$$
$$\Rightarrow\quad 0<\ln\left(1+x^2\right)<\ln\left(1+c^2\right)<\ln\left(1+4x^2\right)$$
$$\Rightarrow\quad\frac{1}{\ln\left(1+4x^2\right)}<\frac{1}{\ln\left(1+c^2\right)}<\frac{1}{\ln\left(1+x^2\right)}$$
$$\Rightarrow\quad\frac{x}{\ln\left(1+4x^2\right)}<\frac{x}{\ln\left(1+c^2\right)}<\frac{x}{\ln\left(1+x^2\right)}$$

إذن :
$$\boxed{\forall x>0\;;\quad\frac{x}{\ln\left(1+4x^2\right)}<F(x)<\frac{x}{\ln\left(1+x^2\right)}}.$$

جـ- نعلم أن : $\forall x>0\;;\quad\dfrac{x}{\ln\left(1+4x^2\right)}<F(x)<\dfrac{x}{\ln\left(1+x^2\right)}$.

بما أن : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{\ln\left(1+4x^2\right)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{4x}\dfrac{4x^2}{\ln\left(1+4x^2\right)}=+\infty$ ،

لأن : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{4x^2}{\ln\left(1+4x^2\right)}=\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{u}{\ln(1+u)}=1$ حيث $u=4x^2$ و $u\underset{x\to0^+}{\to}0^+$ ،

فإن : $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=+\infty}$.

وبما أن :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln\left(1+4x^2\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2\ln(x)+\ln\left(\frac{1}{x^2}+4\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(x)}\frac{1}{2+\frac{1}{\ln(x)}\ln\left(\frac{1}{x^2}+4\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln\left(1+4x^2\right)}=+\infty$$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln(x)}=+\infty$ ، فإن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty}$.

لدينا : $\dfrac{1}{\ln\left(1+x^2\right)}<\dfrac{F(x)}{x}<\dfrac{1}{\ln\left(1+4x^2\right)}\ ;\ \forall x>0$.

وبما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln\left(1+4x^2\right)}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln\left(1+x^2\right)}=0$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+4x^2\right)=+\infty$ و

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+x^2\right)=+\infty$ ، فإن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}=0}$.

د- نعلم أن : $\dfrac{x}{\ln\left(1+x^2\right)}<F(x)<\dfrac{x}{\ln\left(1+4x^2\right)}\ ;\ \forall x>0$.

إذن : $F\left(\dfrac{\sqrt{e}-1}{2}\right)>\dfrac{\sqrt{e}-1}{2}\quad\Rightarrow\quad F\left(\dfrac{\sqrt{e}-1}{2}\right)>\dfrac{\dfrac{\sqrt{e}-1}{2}}{\ln\left(1+4\left(\dfrac{\sqrt{e}-1}{2}\right)^2\right)}$.

و $F\left(\sqrt{e}-1\right)<\sqrt{e}-1\quad\Rightarrow\quad F\left(\sqrt{e}-1\right)<\dfrac{\sqrt{e}-1}{\ln\left(1+\left(\sqrt{e}-1\right)^2\right)}$.

نضع : $\psi(x)=F(x)-x\ ;\ \forall x\in\left]0,+\infty\right[$.

لدينا F دالة تناقصية قطعا على المجال $\left]0,\sqrt{2}\right]$. إذن : $\forall x\in\left]0,\sqrt{2}\right[\ ;\ \psi'(x)=F'(x)-1<0$.

وبما أن ψ متصلة وتناقصية قطعا على المجال $\left]0,\sqrt{2}\right]$ ، فإن ψ **تقابل** من المجال $\left]0,\sqrt{2}\right]$ نحو المجال

$K=\psi\left(\left]0,\sqrt{2}\right]\right)=\left[\psi\left(\sqrt{2}\right),\lim\limits_{x\to 0^+}\psi(x)\right[=\left[\psi\left(\sqrt{2}\right),+\infty\right[$. ولدينا : $F\left(\sqrt{2}\right)<\dfrac{\sqrt{2}}{\ln(3)}$ ، وحيث

أن : $\dfrac{\sqrt{2}}{\ln(3)}<\sqrt{2}\Leftarrow 1>\dfrac{1}{\ln(3)}<1\Leftarrow \ln(3)>1\Leftarrow 3>e$ ، فإن : $F\left(\sqrt{2}\right)<\sqrt{2}$. أي : $\psi\left(\sqrt{2}\right)<0$.

إذن : $0\in K$ ، ومنه فإن المعادلة $\psi(x)=0$ ، أي $F(x)=x$ ، تقبل حلا وحيدا في المجال $\left]0,\sqrt{2}\right]$.

وبما أن : $F\left(\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}\right)>\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}$ و $F\left(\sqrt{e-1}\right)<\sqrt{e-1}$ ، فإن $\psi\left(\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}\right)>0$ و $\psi\left(\sqrt{e-1}\right)<0$.

ولدينا : $\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}\in\left]0,\sqrt{2}\right]$ و $\sqrt{e-1}\in\left]0,\sqrt{2}\right]$.

إذن : $\psi\left(\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}\right)\times\psi\left(\sqrt{e-1}\right)<0$.

ونعلم أن ψ دالة متصلة وتناقصية قطعا على المجال $\left[\dfrac{\sqrt{e-1}}{2},\sqrt{e-1}\right]$ ، لأن : $\left[\dfrac{\sqrt{e-1}}{2},\sqrt{e-1}\right]\subset\left]0,\sqrt{2}\right]$.

حسب مبرهنة القيم الوسيطية .T.V.I ، فإن المعادلة $\psi(x)=0$ ، أي $F(x)=x$ ، تقبل حلا وحيدا في المجال

$\left]\dfrac{\sqrt{e-1}}{2},\sqrt{e-1}\right[$.

ولدينا : F دالة تزايدية قطعا على المجال $\left]\sqrt{2},+\infty\right[$.

إذن :
$$x\in\left]\sqrt{2},+\infty\right[\Rightarrow x>\sqrt{2}\Rightarrow 1+x^2>3\Rightarrow 1+x^2>e\Rightarrow \ln\left(1+x^2\right)>1$$
$$\Rightarrow\frac{1}{\ln\left(1+x^2\right)}<1\Rightarrow\frac{x}{\ln\left(1+x^2\right)}<x$$

ونعلم أن : $F(x)<\dfrac{x}{\ln\left(1+x^2\right)}$. ومنه فإن : $F(x)<x$. وعليه فإن المعادلة $F(x)=x$ لا تقبل حلا في المجال

$\left]\sqrt{2},+\infty\right[$.

<u>خلاصة :</u> المعادلة $F(x)=x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left]0,+\infty\right[$.

<u>انتهى</u>

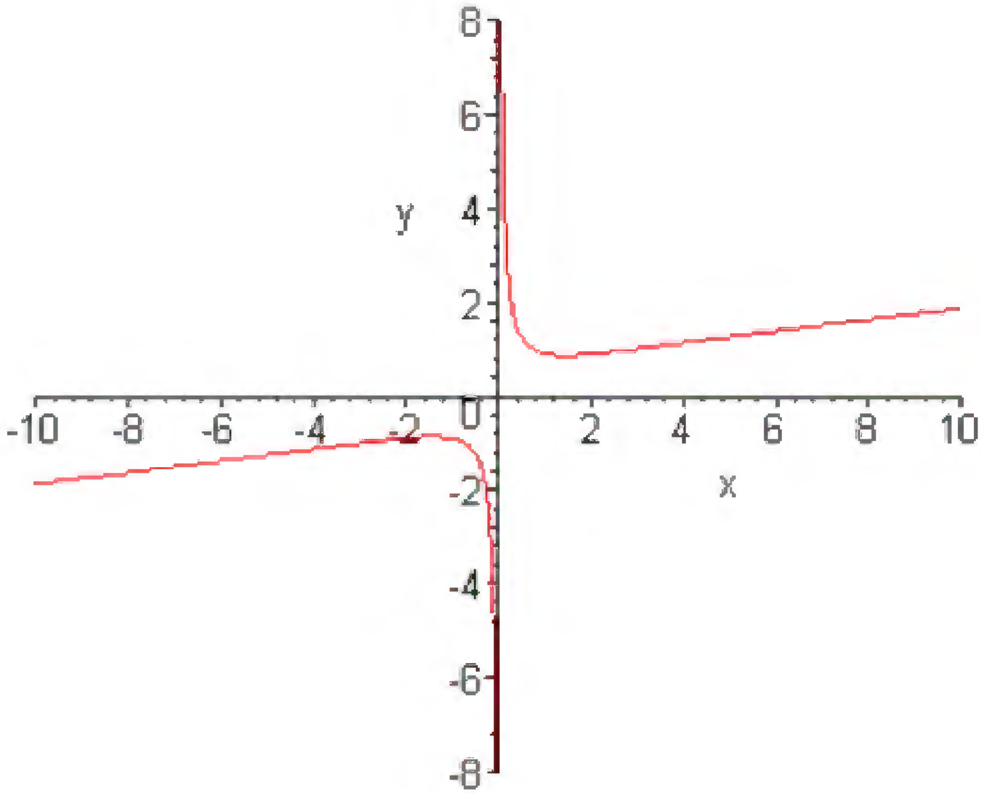
جدول تغيرات الدالة F على المجال $\left]0,+\infty\right[$:

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$F(\sqrt{2})>0$	$\nearrow$	$+\infty$

إنشاء منحنى الدالة F على $\mathbb{R}^*$:

$(\mathscr{C}_F)$ يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ اتجاهه محور الأفاصيل: $\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x)=+\infty}$ و $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0}$

F دالة فردية ومنه فإن منحناها $(\mathscr{C}_F)$ متماثل بالنسبة لأصل المعلم.

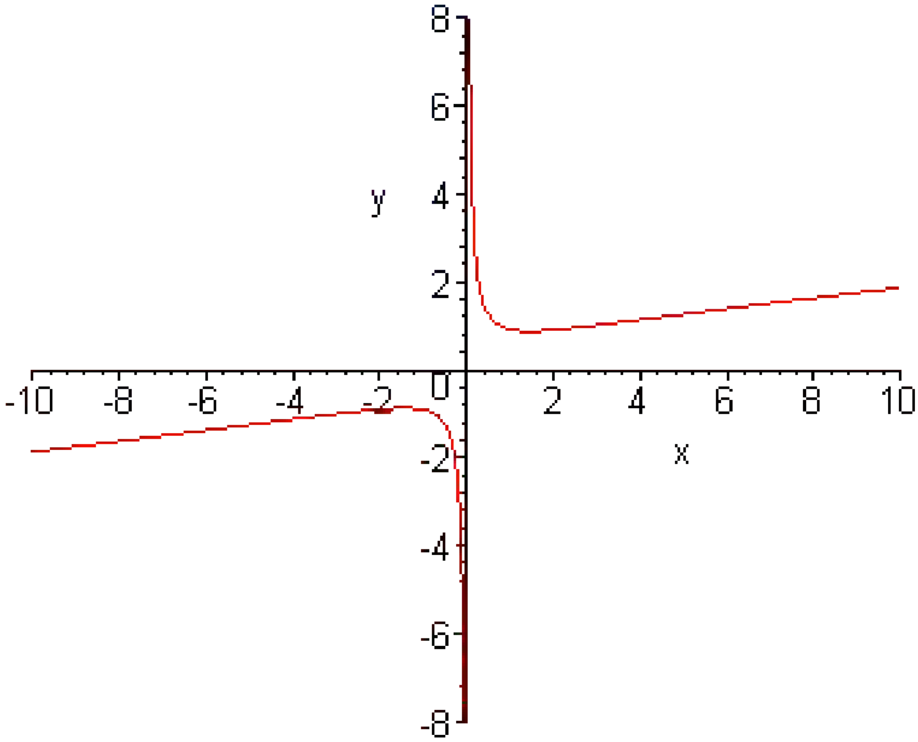


```
> with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined

> F:=x->int(1/ln(1+t^2),t=x..2*x);
```

$$F := x \rightarrow \int_{x}^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}\,dt$$

```
> plot(F(x),x=-10..10,y=-8..8);
```




```
> with(linalg):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

> A:=matrix(3,3,[1,1,-2,-1,-1,2,-2,-2,0]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> A||2:=evalm(A^2);
```

$$A2 := \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> A||3:=evalm(A^3);
```

$$A3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A^3=O, donc A n'est pas inversible dans M3(IR)
Le déterminant de la matrice A est nul , ce qui justifie encore que la matrice A n'est pas inversible:

```
> det(A);
```

$$0$$

```
> eq:=4*z^2-10*I*z-7-I=0;
```

$$eq := 4\,z^2 - 10\,I\,z - 7 - I = 0$$

Résolution de l'équation eq dans l'ensemble des nombres complexes :

```
> solve(eq,z);
```

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2}I, \frac{-1}{2} + I$$

```
> S:={solve(eq,z)};
```

$$S := \{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}I, \frac{-1}{2} + I\}$$

Liste des racines de l'équation eq:

```
> L:=[solve(eq,z)];
```

$$L := \frac{1}{2} + \frac{3}{2}I, \frac{-1}{2} + I$$

```
> a:=L[2];
```

$$a := \frac{-1}{2} + I$$

```
> b:=L[1];
```

$$b := \frac{1}{2} + \frac{3}{2}I$$

```
> b/a;
```

$$1 - I$$

Forme trigonomètrique de (b-a)/a:

```
> polar((b-a)/a);
```

$$\operatorname{polar}\left(1, -\frac{1}{2}\pi\right)$$

Donc AOB est un triangle isocèle et rectangle au point A.
Calcul de d et l en fonction de c:

```
> d:=exp(I*Pi/2)*c+(1-exp(I*Pi/2))*b;
```

$$d := I\,c + 2 + I$$

```
> l:=d-a;
```

$$l := I\,c + \frac{5}{2}$$