تصحيح موضوع مادة الرياضيات ، شعبة العلوم الرياضية ، الإمتحان الوطني دورة يوليوز 2010

تقديـــم: ذ.العربي الوظيفي

ثانوية ابن تومرت مراكش

==

التمريـــن 1:

1.نبين أن E جزء مستقر في $(M_3(\mathbb{R}),\times)$.

ليكن M و N عنصرين من E ،

إذن يوجد عددان حقيقيان x و y حيث $M=M(x)$ و $N=M(y)$.

لدينا :
$$M(x)\times M(y)=\begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\x^2&2x&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\y&1&0\\y^2&2y&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\x+y&1&0\\(x+y)^2&2(x+y)&1\end{pmatrix}$$
$$=M(x+y)$$

إذن لكل M و N من E : $M\times N\in E$

ومنه $\boxed{E \text{ جزء مستقر في } (M_3(\mathbb{R}),\times).}$

2.أ. نبين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(E,\times)$.

. ليكن x و y من R . لدينا :
$$\varphi(x+y)=M(x+y)=M(x)\times M(y)=\varphi(x)\times\varphi(y)$$

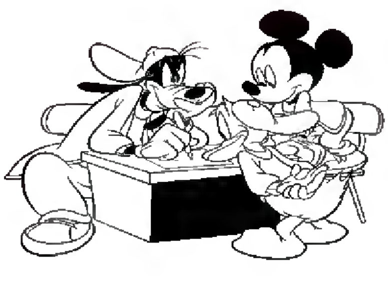
إذن لكل x و y من R لدينا : $\varphi(x+y)=\varphi(x)\times\varphi(y)$.

ومنه : φ تشاكل من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(E,\times)$.

. لكل عنصر M من E يوجد عدد حققي x حيث $M=M(x)$ وذلك حسب تعريف M.

ومنه φ تطبيق شمولي من R نحو E .

. ليكن x و y من R ، لدينا
$$\varphi(x)=\varphi(y)\Rightarrow M(x)=M(y)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x=y\\x^2=y^2\\2x=2y\end{cases}$$
$$\Rightarrow x=y$$



إذن لكل x و y من R حيث $\varphi(x)=\varphi(y)$ لدينا $x=y$.

ومنه φ تطبيق تبايني من R نحو E .

وعليه فإن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(E,\times)$.

2.ب.نستنتج أن $(E,\times)$ زمرة تبادلية :

نعلم أن $(\mathbb{R},+)$ زمرة تبادلية وحيث أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(E,\times)$ فإن $(E,\times)$ زمرة تبادلية .

2.ج.نحدد مقلوب المصفوفة $M(x)$ حيث x من R :

ليكن x عددا حقيقيا . مماثل x في $(\mathbb{R},+)$ هو $(-x)$.

بما أن φ تشاكل تقابلي من $(R,+)$ نحو $(E,\times)$ فإن مماثل $\varphi(x)$ في $(E,\times)$ هو $\varphi(-x)$.
ومنه

مقلوب المصفوفة $M(x)$ هو المصفوفة $M(-x)$.

2.د.نحل في المجموعة E المعادلة $A^5.X=B$ حيث $A=M(2)$ و $B=M(12)$ و $A^5=A\times A\times A\times A\times A$:

ليكن X عنصرا من E.
إذن $X=M(x)$ حيث x عنصر من R.
بما أن φ تشاكل تقابلي من $(R,+)$ نحو $(E,\times)$ فإن φ^{-1} تشاكل تقابلي من $(E,\times)$ نحو $(R,+)$.
ولدينا لكل x من R : $\varphi^{-1}(M(x))=x$. إذن :

ومنه :

مجموعة حلول المعادلة هي $S=\{M(2)\}$

3.بين أن المجموعة $F=\{M(\ln x)/\ x\in R_+^*\}$ زمرة جزئية للزمرة $(E,+)$.

. العنصر المحايد في $(R,+)$ هو العدد الحقيقي 0 .
بما أن φ تشاكل تقابلي من $(R,+)$ نحو $(E,\times)$ فإن العنصر المحايد في $(E,\times)$ هو $\varphi(0)$ أي المصفوفة $M(0)$.
ولدينا $M(0)=M(\ln 1)$ والعدد 1 عنصر من R_+^* إذن $M(0)\in F$ إذن F غير فارغة .
. ليكن a و b عنصرين من F .
إذن: $a=M(\ln x)$ و $b=M(\ln y)$ حيث x و y عنصران من $]0;+\infty[$.
مقلوب المصفوفة b *هو المصفوفة* $b^{-1}=M(-\ln y)$.

لدينا : $a\times b^{-1}=M(\ln x)\times M(-\ln y)=M(\ln x-\ln y)=M\left(\ln\frac{x}{y}\right)$

وحيث أن $\frac{x}{y}$ عنصر من $]0;+\infty[$ فإن $M\left(\ln\frac{x}{y}\right)$ عنصر من F .

وعليه فإن

F زمرة جزئية للزمرة $(E,+)$.

التمريـــن 2:

1.أ.نتحقق أن العدد العقدي $a=1+i(2-\sqrt{3})$ حل للمعادلة $z^2-4iz-2+2i\sqrt{3}=0$:

تعويض ثم تبيسيط ...

1.ب.نستنتج الحل الثاني b للمعادلة (E) :

نعلم أن مجموع الحلين هو : $a+b=4i$. إذن : $b=4i-a$
ومنه

الحل الثاني هو $b=-1+i(2+\sqrt{3})$.

2.أ.نبين أن $a^2=4(2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$:

لدينا : $a^2=\left(1+i(2-\sqrt{3})\right)^2=-6+4\sqrt{3}+4i-2i\sqrt{3}=4(2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$
ومنه

$a^2=4(2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$

2.ب.لنستنتج شكلا مثلثيا للعدد a :

لدينا $a^2 = 4\left(2-\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$ إذن : العدد a جذر مربع للعدد $4\left(2-\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$.

ومنه : $a = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{12}}$ أو $a = -2\sqrt{2-\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{12}}$

وحيث أن الجزئين الحقيقي والتخيلي للعدد a موجبان فإن $a = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

3.أ.لنحدد لحق مركز الدائرة :

$[AB]$ قطر في الدائرة (Γ) . إذن لحق مركز الدائرة (Γ) هو $\omega = \dfrac{a+b}{2}$

ومنه

$\boxed{\text{لحق مركز الدائرة هو } \omega = 2i.}$

3.ب.يبين أن O و C نقطتان من (Γ) :

شعاع الدائرة (Γ) هو $R = \dfrac{|b-a|}{2} = \dfrac{\left|2-2i\sqrt{3}\right|}{2} = 2$

بما أن $\left|2e^{i\frac{\pi}{7}}\right| = 2$ فإن $\Omega C = |c-2i| =$ $C \in (\Gamma)$.

بما أن $\Omega O = |\omega| = |2i| = 2$ فإن $O \in (\Gamma)$.

3.ج.نبين أن العدد العقدي $\dfrac{c-a}{c-b}$ تخيلي صرف :

بما أن C تنتمي إلى الدائرة التي أحد أقطارها $[AB]$ وتخالف النقطتين A و B فإن المثلث ABC قائم الزاوية في C

ومنه قياس للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$ هو عمدة لعدد عقدي تخيلي صرف .

وعليه فإن العدد العقدي $\dfrac{c-a}{c-b}$ تخيلي صرف .

التمريـــن 3:

أ.نحدد قيم X :

نسحب عشوائيا الكرات واحدة تلو الأخرى ونقف حالما تظهر أول كرة بيضاء .

ليكن X عدد الكرات المسحوبة .قيم X هي : 1 ، 2 و 3 .

ب.نحسب احتمال $p(X=1)$:

الحدث $(X=1)$ هو الحصول على كرة بيضاء في المرة الأولى :

$$p(X=1) = \frac{card(X=1)}{card\Omega} = \frac{A_{10}^{1}}{A_{12}^{1}} = \frac{5}{6}$$

ج. نبين أن $p(X=2) = \dfrac{5}{33}$:

الحدث $(X=2)$ هو الحصول على كرة حمراء في المرة الأولى وكرة بيضاء في المرة الثانية:

$$p(X=2) = \frac{card(X=2)}{card\Omega} = \frac{A_{2}^{1}A_{10}^{1}}{A_{12}^{2}} = \frac{5}{33}$$

1.د.نحسب احتمال الحدث $(X=3)$:

الحدث $(X=3)$ هو الحصول على كرة حمراء في المرة الأولى والثانية وكرة بيضاء في المرة الثالثة:

$$p(X=3) = \frac{card(X=3)}{card\Omega} = \frac{A_{2}^{2}.A_{10}^{1}}{A_{12}^{3}} = \frac{2\times 10}{12\times 11\times 10} = \frac{1}{66}$$

2.أ.نبين أن $E(X)=\frac{13}{11}$:

قانون احتمال X هو :

x_i	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{33}$	$\frac{1}{66}$

إذن : الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X هو : $E(X)=1.\frac{5}{6}+2.\frac{5}{33}+3.\frac{1}{66}$

ومنه

الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X هو : $E(X)=\frac{13}{11}$

2.ب.نحدد $E(X^2)$ ثم نحسب $V(X)$:

$$E(X^2)=1^2.\frac{5}{6}+2^2.\frac{5}{33}+3^2.\frac{1}{66}=\frac{52}{33}$$

نعلم أن $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

إذن $V(X)=\frac{52}{33}-\left(\frac{13}{11}\right)^2=\frac{65}{363}$

ومنه :

$E(X^2)=\frac{52}{11}$ و $V(X)=\frac{65}{363}$

مسألـــة :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[0,1]$ بما يلي :
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{1-\ln(1-x)} & , \quad 0\leq x<1 \\ f(1)=0 \end{cases}$$

الجزء 1:

1.لنبين أن الدالة f متصلة على اليسار في 1 :

لدينا بوضع $X=1-x$: $\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{X\to0^+}\frac{1}{1-\ln X}$

وبما أن $\lim_{X\to0^+}\ln X=-\infty$ فإن $\lim_{X\to0^+}\frac{1}{1-\ln X}=0$

وبالتالي : $\lim_{x\to1^-}f(x)=f(0)$

ومنه f متصلة على اليسار في 1 .

2.لندرس قابلية اشتقاق f على اليسار في 1 :

لدينا :

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{(x-1)(1-\ln(1-x))}$$
$$=\lim_{X\to0^+}\frac{1}{-X(1-\ln X)} \qquad (X=1-x)$$
$$=\lim_{X\to0^+}\frac{1}{-X+X\ln X}$$

وبما أن X يؤول إلى 0^+ فيمكن اعتبار X من $]0,1[$

وبالتالي: $-X+X\ln X \prec 0$ أي: $\lim\limits_{X\to 0^+} -X+X\ln X=0^-$

ومنه : $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$

وبالتالي f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 1 .

3.ندرس تغيرات f على I :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0,1[$ و لكل x من $[0,1[$ لدينا :

$$f'(x)=\frac{-(1-\ln(1-x))'}{(1-\ln(1-x))^2}=\frac{-1}{(1-x)(1-\ln(1-x))^2}\prec 0$$

ومنه f تناقصية قطعا على $[0,1[$.

وحيث أن f متصلة على اليسار في 1 فإن f تناقصية قطعا على $[0,1]$.

جدول تغيرات الدالة f هو :

x	0 1
$f'(x)$	+
f	1 ↘ 0

4.أ- نبين أن لمنحنى f نقطة انعطاف وحيدة أفصولها $\frac{e-1}{e}$:

$$f''(x)=\frac{-(1-\ln(1-x))^2+2(1-x).(1-\ln(1-x)).\frac{1}{1-x}}{(1-x)^2(1-\ln(1-x))^4}=\frac{(1-\ln(1-x))(1+\ln(1-x))}{(1-x)^2(1-\ln(1-x))^4}$$

بما ان $1-x\prec 1$ فان $\ln(1-x)\prec 0$ ومنه : $0\prec 1-\ln(1-x)$

و بالتالي إشارة $f''(x)$ هي اشارة $1+\ln(1-x)$ ولدينا :

$$\begin{aligned} f''(x)=0 &\Leftrightarrow 1+\ln(1-x)=0\\ &\Leftrightarrow \ln(1-x)=-1\\ &\Leftrightarrow 1-x=\frac{1}{e}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{e-1}{e}\end{aligned}$$

ولدينا :

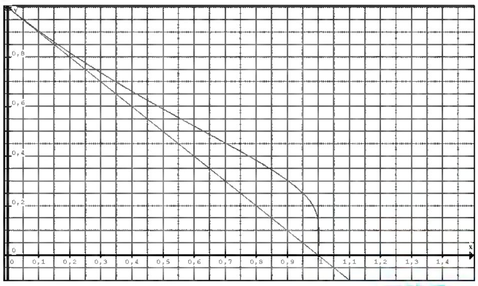
$$\begin{aligned} f''(x)\succ 0 &\Leftrightarrow \ln(1-x)\succ -1\\ &\Leftrightarrow 1-x\succ\frac{1}{e}\\ &\Leftrightarrow x\prec\frac{e-1}{e}\end{aligned}$$

المشتقة الثانية للدالة f تنعدم وتغير إشارتها عند $\frac{e-1}{e}$.

ومنه

منحنى f يقبل نقطة انعطاف وحيدة أفصولها $\frac{e-1}{e}$.

4.ب- إنشاء منحنى f :



5.نبين وجود عدد حقيقي وحيد α من I حيث $f(\alpha)=\alpha$.

نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على I بما يلي : $\varphi(x)=f(x)-x$

الدالتان : f و $x\mapsto -x$ تناقصيتان على I اذن φ تناقصية قطعا على I. (مجموع دالتين لهما نفس الرتابة على مجال)

ولدينا : φ متصلة على I (مجموع دالتين متصلتين على مجال)

ولدينا: $\varphi(0)\times\varphi(1)=-1\prec 0$

إذن : حسب مبرهنة القيم الوسطية المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0,1[$.

ومنه

يوجد عنصر وحيد α في I حيث $f(\alpha)=\alpha$

6.أ.نبين أن f تقابل من I نحو I :

بما أن f متصلة وتناقصية قطعا على المجال I

فإن f تقابل من I نحو المجال $[f(1);f(0)]=[0;1]$.

6.ب.لنحدد $f^{-1}(x)$ لكل x من I :

ليكن x و y عنصرين من I حيث $f^{-1}(x)=y$.

. إذا كان $x=0$ فإن $y=1$ لأن $f(1)=0$.

.نفترض أن $x\neq 0$ لدينا :

$$\begin{aligned} f^{-1}(x)=y &\Leftrightarrow f(y)=x \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{1-\ln(1-y)}=x \\ &\Leftrightarrow \ln(1-y)=\frac{x-1}{x} \\ &\Leftrightarrow y=1-e^{\frac{x-1}{x}} \end{aligned}$$

ومنه

$$\boxed{\begin{cases} f^{-1}(x)=1-e^{\frac{x-1}{x}} & ; \quad x\in]0;1] \\ f^{-1}(0)=1 \end{cases}}$$

الجزء 2:

ليكن n من N، لدينا: $I_{n+1}-I_n=\int_0^1 t^{n+1}f(t)dt-\int_0^1 t^n f(t)dt=\int_0^1 t^n(t-1)f(t)dt$

وحيث أن $t\in[0;1]$ فإن $t-1\le 0$ و بالتالي $t^n(t-1)f(t)\le 0$ إذن $\int_0^1 t^n(t-1)f(t)dt\le 0$

ومنه $I_{n+1}-I_n\le 0$ لكل n من N .

وعليه فإن المتتالية (I_n) تناقصية .

. لدينا $f(t)\ge 0$ لكل t من $[0;1]$.إذن $I_n=\int_0^1 t^n f(t)dt\ge 0$ لكل n من N .

ومنه (I_n) مصغورة بالعدد 0.

بما أن (I_n) تناقصية ومصغورة فإنها متقارية .

2.نبين أن $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$:

ليكن n من $\mathbb{N}$ ،

لدينا: $f(t) \le 1$ لكل t من $[0\,;1]$.

إذن $t^n f(t) \le t^n$ لكل t من $[0\,;1]$.

ومنه : $0 \le \int_0^1 t^n f(t)dt \le \int_0^1 t^n dt$

وحيث أن $\int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ فإن $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

نحدد نهاية المتتالية (I_n)

بما أن $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ فإن $\lim I_n = 0$ (مبرهنة الدركي... احتراماتي وتقديراتي !
).

الجزء 3:

1.نبين أن $F(x) - S_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{1-t}dt$ لكل n من $\mathbb{N}$ و x من J :

ليكن n من $\mathbb{N}$ و x من $J = [0;1[$. لدينا :

$$\begin{aligned}
F(x) - S_n(x) &= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t}dt - \sum_{k=0}^{n} F_k(x) \\
&= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t}dt - \sum_{k=0}^{n} \int_0^x t^k f(t)dt \\
&= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t}dt - \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n} t^k\right) f(t)dt \\
&= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t}dt - \int_0^x \left(\frac{1-t^{n+1}}{1-t}\right) f(t)dt \\
&= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} - \left(\frac{1-t^{n+1}}{1-t}\right) f(t)dt \\
&= \int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{1-t}dt
\end{aligned}$$

ومنه :

$$\boxed{F(x) - S_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{1-t}dt \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ و } x \text{ من } J .}$$

2.أ.نبين أن الدالة $x \mapsto (1-x)(1-\ln(1-x))$ تناقصية قطعا على المجال J:

الدالة $\varphi : x \mapsto (1-x)(1-\ln(1-x))$ قابلة للإشتقاق على J حسب العمليات على الدوال القابلة للإشتقاق على مجال

ولكل x من J لدينا : $\varphi'(x) = \ln(1-x)$

وحيث أن $x \in [0,1[$ فإن $\varphi'(x) \le 0$ أي أن φ تناقصية قطعا على J .

2.ب.نستنتج أن الدالة $t \mapsto \frac{f(t)}{1-t}$ تزايدية قطعا على $[0,x]$ حيث x عنصر من J .

ليكن x عنصرا من J .

لكل t من $[0,x]$ لدينا $\dfrac{f(t)}{1-t}=\dfrac{1}{(1-t)(1-\ln(1-t))}=\dfrac{1}{\varphi(t)}$

وحيث أن φ تناقصية قطعا على $[0,x]$ ولاتنعدم عليه فإن $\dfrac{1}{\varphi}$ تزايدية قطعا على $[0,x]$.

ومنه :

الدالة $t\mapsto\dfrac{f(t)}{1-t}$ تزايدية قطعا على $[0,x]$ لكل x عنصر من J .

3.أ.بين أن $0\le F(x)-S_n(x)\le\dfrac{1}{1-x}\dfrac{1}{n+2}$ لكل n من N و x من J :

ليكن n من N و x من J ،

لدينا : $F(x)-S_n(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}dt$

لكل t من $[0,x]$ لدينا $0\le\dfrac{f(t)}{1-t}\le\dfrac{f(x)}{1-x}$ لأن الدالة $t\mapsto\dfrac{f(t)}{1-t}$ تزايدية قطعا على $[0,x]$.

ومنه $0\le\dfrac{t^{n+1}f(t)}{1-t}\le\dfrac{t^{n+1}f(x)}{1-x}$ لكل t من $[0,x]$.

وبالتالي : $0\le\displaystyle\int_0^x\frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}dt\le\int_0^x\frac{t^{n+1}f(x)}{1-x}dt$

أي : $0\le\displaystyle\int_0^x\frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}dt\le\frac{1}{1-x}\int_0^x t^{n+1}dt$ لأن $f(x)\le 1$

ولدينا $\displaystyle\int_0^x t^{n+1}dt=\left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^x=\frac{x^{n+2}}{n+2}$.

وبما أن $x\in[0,1[$ فإن $\dfrac{x^{n+2}}{n+2}\prec\dfrac{1}{n+2}$ ومنه $0\le\displaystyle\int_0^x\frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}dt\le\frac{1}{1-x}\frac{1}{n+2}$.

وعليه فإن :

$0\le F(x)-S_n(x)\le\dfrac{1}{1-x}\dfrac{1}{n+2}$ لكل n من N و x من J

3.ب نستنتج أن لكل x من J لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)=F(x)$:

ليكن x من J ،

لكل n من N لدينا $0\le F(x)-S_n(x)\le\dfrac{1}{1-x}\dfrac{1}{n+2}$

وحيث أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{1-x}\dfrac{1}{n+2}=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)=F(x)$.

ومنه :

لكل x من J لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)=F(x)$.

4.أ. نحدد $F(x)$ من أجل $x\in J$:

ليكن x من J ، لدينا:

$$F(x)=\int_0^x\frac{f(t)}{1-t}dt=\int_0^x\frac{1}{(1-t)(1-\ln(1-t))}dt=\int_0^x\frac{(1-\ln(1-t))'}{(1-\ln(1-t))}dt=\left[\ln\left|1-\ln(1-t)\right|\right]_0^x=\ln(1-\ln(1-x))$$

ومنه :

لكل x من J لدينا : $F(x)=\ln(1-\ln(1-x))$

4.ب.نحدد النهاية $\lim\limits_{x\to1^-}F(x)$:

لدينا $\lim\limits_{x\to1^-}\ln(1-x)=\lim\limits_{t\to0^+}\ln t=-\infty$ بوضع $t=1-x$

ومنه:

$$\boxed{\lim_{x\to1^-}F(x)=+\infty}\ .$$

wadiiifi@hotmail.com

وفقكم اللـــــــــــــه