

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

الجزءان الأول و الثاني مستقلان

التمرين الأول : (4,0 ن)

(I) في الحلقة الواحدية $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ نعتبر المصفوفتين \mathbb{A} و \mathbb{I} المعرفتين بما يلي :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نضع : $\forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}$ و $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ و $\mathbb{A}^1 = \mathbb{A}$ و $\mathbb{A}^0 = \mathbb{I}$

① بين أن : $\forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{A}^{2k} = \mathbb{I}$ ن 0,50

② بين أن المصفوفة \mathbb{A} تقبل مقلوبا \mathbb{A}^{-1} ينبغي تحديده. ن 0,50

ليكن α عددا حقيقيا .

لكل x و y من المجال $I =]\alpha, +\infty[$ نضع : $x * y = (x - \alpha)(y - \alpha) + \alpha$

① ① بين أن : * قانون تركيب داخلي في I ن 0,50

② بين أن القانون * تبادلي و تجميعي ن 0,50

③ بين أن المجموعة $(I, *)$ تقبل عنصرا محايدا يتم تحديده ن 0,50

② بين أن المجموعة $(I, *)$ زمرة تبادلية ن 0,50

③ نعتبر التطبيق :

$$\begin{aligned} \varphi : I &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longrightarrow \frac{1}{x - \alpha} \end{aligned}$$

① بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(I, *)$ إلى (\mathbb{R}_+^*, \times) . ن 0,50

② حل في المجموعة I المعادلة : $x^{(3)} = a^3 + a$ بحيث : $x^{(3)} = x * x * x$ ن 0,50

التمرين الثاني : (2,5 ن)

ليكن N العدد الصحيح الطبيعي الممثل في نظمة العد العشري بما يلي : $N = \underbrace{111 \dots 11}_{\text{1 مرة 2010}}$

① بين أن N يقبل القسمة على العدد 11 ن 0,25

② ① تحقق أن العدد 2011 أولي , و أن : $10^{2010} - 1 = 9N$ ن 0,75

② بين أن العدد 2011 يقسم العدد $9N$ ن 0,50

③ استنتج أن العدد 2011 يقسم العدد N . ن 0,50

③ بين أن العدد N يقبل القسمة على العدد 22121 ن 0,50

الجزءان الأول والثاني مستقلان **التمرين الثالث : (3,5 ن)**

(I) ليكن m عددا عقديا غير منعدم . نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z :

$$(E_m) : z^2 + [(1-i)m - 4]z - im^2 - 2(1-i)m + 4 = 0$$

① تحقق أن العدد $z_1 = 2 - m$ حل للمعادلة (E_m) .

ن 0,50

② ليكن z_2 الحل الثاني للمعادلة (E_m) .

أ بين أن $z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow im^2 + 2(1-i) - 3 = 0$

ن 0,50

ب حدد قيمتي m بحيث $z_1 z_2 = 1$

ن 1,00

(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(\sigma, \vec{u}, \vec{v})$.

تعتبر التطبيق S الذي يربط النقطة M التي لحقها z بالنقطة M' التي لحقها z' بحيث :

و الدوران \mathcal{R} الذي مركزه النقطة Ω ذات اللق $(1+i)$ و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$ و ليكن z'' لحق النقطة M'' صورة

M بالدوران \mathcal{R} .

① أ بين أن التطبيق S هو التماثل المركزي الذي مركزه النقطة ذات اللق 1

ن 0,25

ب بين أن : $z'' = iz + 2$.

ن 0,25

② نفترض أن النقطة M تخالف O أصل المعلم و لتكن A النقطة التي لحقها 2

أ احسب $\frac{z''-2}{z'-2}$ ثم استنتج طبيعة المثلث $AM'M''$

ن 0,50

ب حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط A و Ω و M' و M'' متداورة.

ن 0,50

التمرين الرابع : (6,5 ن) (I) دراسة الحلول الموجبة للمعادلة $e^x = x^n$: (E) بحيث $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\ln x} ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

و ليكن (\mathcal{C}) المنحنى الممثل للدالة في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\sigma, \vec{i}, \vec{j})$.

① تحقق أنه لكل x من المجموعة $]0,1[\cup]1, +\infty[$ لدينا : $(e^x = x^n \Leftrightarrow n = f(x))$.

ن 0,25

② بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0.

ن 0,50

③ احسب النهايات التالية ثم أول هندسيا النتائج المحصل عليها :

ن 1,50

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

④ أدرس تغيرات الدالة f على كل من المجالين $]0,1[$ و $]1, +\infty[$ ثم إعط جدول تغيراتها.

ن 0,75

⑤ بين أن (\mathcal{C}) يقبل نقطة انعطاف يتم تحديد زوج احداثيتها.

ن 0,50

⑥ أنشئ المنحنى (\mathcal{C})

ن 0,50

⑦ بين أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن المعادلة (E) تقبل بالضبط حلين اثنين α_n و b_n بحيث $1 < \alpha_n < e < b_n$.

ن 0,50

(II) دراسة تقارب المتتاليتين $(\alpha_n)_{n \geq 3}$ و $(b_n)_{n \geq 3}$.

① بين أن $b_n \geq n$ ($\forall n \geq 3$) ثم استنتج نهاية المتتالية $(b_n)_{n \geq 3}$ ن 0,50

② ① بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 3}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة. ن 0,50

② ① بين أن $\frac{1}{n} < \ln(\alpha_n) < \frac{e}{n}$ ($\forall n \geq 3$) ثم استنتج نهاية المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 3}$. ن 0,50

③ بين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = e$ ن 0,50

التمرين الخامس: (3,5 ن)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$

① ① بين أن : $0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$ ($\forall x \geq 0$). ن 0,50

② ① بين أن : $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ ($\forall x \geq 1$) ثم استنتج نهاية الدالة F عند $+\infty$. ن 0,50

② بين أن F قابلة للإشتقاق على $[0, +\infty[$ وأن : $F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$ ($\forall x \geq 0$). ن 0,50

③ نعتبر الدالة العددية G المعرفة على $[0, \frac{\pi}{2}]$ بما يلي :
$$\begin{cases} G(x) = F(\tan x) \\ G(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

① بين أن الدالة G متصلة على اليسار في $\frac{\pi}{2}$. ن 0,25

② بين أنه يوجد عدد حقيقي c ينتمي إلى المجال $[0, +\infty[$ بحيث : $F'(c) = 0$ وأن $F(c) = \frac{1}{2c} e^{-2c^2}$. ن 0,75

(يمكن تطبيق مبرهنة رول بالنسبة للدالة G على المجال $[0, \frac{\pi}{2}]$)

④ نعتبر الدالة العددية H المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $H(x) = F'(x) \frac{e^{x^2}}{2x}$

① بين أن الدالة H تناقصية قطعا على المجال $]0, +\infty[$. ن 0,50

② استنتج أن العدد c وحيد ثم إعط جدول تغيرات الدالة F . ن 0,50