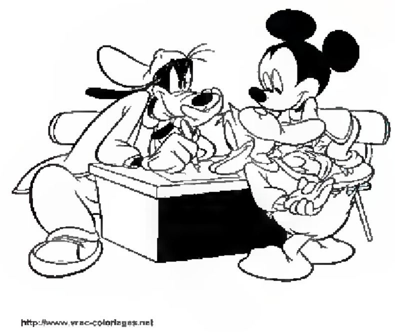
تصحيح موضوع مادة الرياضيات ، شعبة العلوم الرياضية ، الإمتحان الوطني دورة يونيو 2011

تقديـــــم: ذ.العربي الوظيفي

ثانوية ابن تومرت مراكش

==

التمرين الأول :



1)نبين أن $A^{2k}=I \quad (\forall k\in N)$:

نستعمل الإستدلال بالترجع

من أجل $k=0$ لدينا $A^0=I$ (معطيات)

ليكن k من N .

نفترض أن $A^{2k}=I$. لنبين أن : $A^{2(k+1)}=I$

لدينا : $A^{2(k+1)}=A^{2k}\times A^2$.

وبما أن $A^{2k}=I$

و

$$A^2=A\times A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} & 0\\ \frac{\sqrt2}{2} & \frac{-\sqrt2}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} & 0\\ \frac{\sqrt2}{2} & \frac{-\sqrt2}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2 & \left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2 & 0\\ \left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2 & \left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2+\left(\frac{-\sqrt2}{2}\right)^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

فإن : $A^{2(k+1)}=I\times I=I$

ومنه : $A^{2k}=I \quad (\forall k\in N)$

2)نبين أن المصفوفة A تقبل مقلوبا A^{-1} ونحدد A^{-1} :

لدينا $A^2=I$ أي $A\times A=I$

ومنه

المصفوفة A تقبل مقلوبا A^{-1} ولدينا $A^{-1}=A$.

الجزء الثاني :

1)أ-نبين ان $*$ قانون تركيب داخلي في I:

ليكن x و y عنصرين من I .لنبين ان $x*y$ عنصر من I .

لدينا : $x\in I$ و $y\in I$ إذن $x-a\succ 0$ و $y-b\succ 0$

وبالتالي $(x-a)(y-a)+a\succ a$ أي $x*y\succ a$ ومنه $x*y\in I$.

وعليه فإن لكل x و y من I لدينا . $x*y\in I$

ومنه

$*$ قانون تركيب داخلي في I.

1)ب-نبين ان $*$ قانون تبادلي :

ليكن x و y عنصرين من I .

لدينا $x*y=(x-a)(y-a)+a=(y-a)(x-a)+a=y*x$

ومنه : $x*y=y*x$ لكل x و y من I. وبالتالي :

$*$ قانون تبادلي .

. نبين أن * تجميعي :

x وy و z عناصر من I .

لدينا :

$$\begin{aligned}(x*y)*z&=(x*y-a)(z-a)+a\\&=((x-a)(y-a)+a-a)(z-a)+a\\&((x-a)(y-a))(z-a)+a\\&=(x-a)[(y-a)(z-a)]+a\\&=(x-a)\left[\underbrace{(y-a)(z-a)+a}_{y*z}-a\right]+a\\&=(x-a)[(y*z)-a]+a\\&=x*(y*z)\end{aligned}$$

ومنه $(x*y)*z=x*(y*z)$ لكل x وy و z من I

وبالتالي

القانون * تجميعي .

1)ج-نبين ان القانون * يقبل عنصرا محايدا .

إذا كان e هو العنصر المحايد للقانون * في I فإن $(\forall x\in I):\ x*e=x$ (* تبادلي)

يكافئ $(\forall x\in I):(x-a)(e-a)+a=x$

يكافئ $(\forall x\in I):(e-a)x-a(e-a)+a=x$

يكافئ $\begin{cases}e-a=1\\-a(e-a)+a=0\end{cases}$

يكافئ $e=1+a$

ومنه

$(I,*)$ يقبل عنصرا محايدا وهو $e=1+a$.

2)نبين أن $(I,*)$ زمرة تبادلية :

ليكن x و x' عنصرا من I .

$$x*x'=e\Leftrightarrow(x-a)(x'-a)+a=1+a$$

لدينا $(x\succ a)$ $\qquad \Leftrightarrow x'=\dfrac{1}{x-a}+a$

ولدينا $x'\succ a$

ومنه لكل x من I مماثلا في I وهو $\dfrac{1}{x-a}+a$.

وبما أن * قانون تبادلي و تجميعي و يقبل عنصرا محايدا في I .

فإن

$(I,*)$ زمرة تبادلية .

3)أ)نبين أن φ تشاكل من $(I,*)$ نحو $(\mathbb{R}_+^*,\times)$:

ليكن x و y عنصرين من I .

$$\varphi(x*y)=\frac{1}{x*y-a}=\frac{1}{(x-a)(y-a)+a-a}=\frac{1}{x-a}\times\frac{1}{y-a}=\varphi(x)\times\varphi(y)$$

ومنه لكل x و y من I لدينا $\varphi(x*y)=\varphi(x)\times\varphi(y)$

وبالتالي

φ تشاكل من $(I,*)$ نحو $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

نبين أن φ تقابل من I نحو $\mathbb{R}_+^*$.

ليكن y عنصرا من $\mathbb{R}_+^*$.

لدينا :

$$y=\varphi(x) \Leftrightarrow y=\frac{1}{x-a}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{y}+a$$

بما أن $y \succ 0$ فإن $\frac{1}{y}+a \succ a$ أي أن $x \in I$

ومنه لكل y من I يوجد عنصروحيد x في I حيث $\varphi(x)=y$.

وعليه فإن

φ تشاكل تقابلي من $(I,*)$ نحو $(\mathbb{R}_+^*,\times)$

3)ب-نحل في المجموعة I المعادلة $x^{(3)}=a^3+a$:

لدينا $x^{(3)}=a^3+a \Leftrightarrow \varphi\left(x^{(3)}\right)=\varphi\left(a^3+a\right)$ لأن φ تشاكل تقابلي من $(I,*)$ نحو $(\mathbb{R}_+^*,\times)$

ومنه

$$x^{(3)}=a^3+a \Leftrightarrow \varphi(x*x*x)=\varphi\left(a^3+a\right)$$
$$\Leftrightarrow \varphi(x)\times\varphi(x)\times\varphi(x)=\varphi\left(a^3+a\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x-a}\right)^3=\frac{1}{a^3+a-a}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x-a}\right)^3=\frac{1}{a^3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-a}=\frac{1}{a} \quad (a \succ 0)$$
$$\Leftrightarrow x=2a$$

ومنه

المعادلة تقبل حلا وحيدا وهو $2a$

التمرين الثاني :

1)نبين أن N يقبل القسمة على 11 :

لدينا العدد N ممثل في نظمة العد العشري إذن : $N=1+10+10^2+10^3+\ldots+10^{2009}$

نستنتج أن العدد N هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها 10.

ومنه حسب صيغة المجموع : $N=\dfrac{10^{2010}-1}{10-1}$

ولدينا $10\equiv -1\,[11]$ إذن $10^{2010}\equiv(-1)^{2010}\,[11]$ أي $10^{2010}\equiv 1\,[11]$.

وبالتالي $10^{2010}-1\equiv 0\,[11]$

وحيث أن $9 \wedge 11 = 1$ فإن $\frac{10^{2010}-1}{9} \equiv 0\,[11]$. (لاحظ أن $\frac{10^{2010}-1}{10-1}$ عدد طبيعي محترم !)

وبالتالي $N \equiv 0\,[11]$ وهذا يعني أن

Nيقبل القسمة على 11.

ملاحظة : لدينا $10 \equiv -1\,[11]$ إذن :

$$N \equiv 1+(-1)^1+(-1)^2+\dots+(-1)^{2010} \quad [11]$$
$$\equiv \underbrace{1-1+1-1+\dots-1+1}_{2010\ \text{fois}\,1} \quad [11]$$
$$\equiv 0 \quad [11]$$

وبالتالي Nيقبل القسمة على 11.

2)أ- نتحقق من أن العدد 2011 أولي

الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من أو تساوي 2011 هي : 2 ، 3 ، 5 ، ... و43

بما أن العدد 2011 لا يقبل القسمة على أي عدد من هذه الأعداد فإنه أولي .

. من خلال السؤال 1 لدينا $N = \frac{10^{2010}-1}{10-1}$ إذن :

$10^{2010}-1 = 9N$

2)ب-نبين أن 2011 يقسم $9N$:

لدينا 2011 عدد أولي و $10 \wedge 2011 = 1$

إذن حسب مبرهنة فيرما الصغرى لدينا : $10^{2010} \equiv 1\,[2011]$

وبالتالي : $10^{2010}-1 \equiv 0\,[2011]$

وحيث أن $10^{2010}-1 = 9N$ فإن $9N \equiv 0\,[2011]$

ومنه :

2011 يقسم $9N$.

2)ج)استنتاج :

لدينا 2011 يقسم $9N$ و $9 \wedge 2011 = 1$ إذن 2011 يقسم N حسب مبرهنة كوص.

3)نبين أن N يقبل القسمة على 22121 :

لدينا $22121 = 11 \times 2011$

وبما أن $N \equiv 0\,[11]$ و $N \equiv 0\,[2011]$ و $11 \wedge 2011 = 1$

فإن $N \equiv 0 \quad [11 \times 2011]$

أي $N \equiv 0 \quad [22121]$

وهذا يعني أن :

العدد N يقبل القسمة على 22121 .

التمرين الثالث :

الجزء الأول:

1)نتحقق من ان $z_1 = -m+2$ حل للمعادلة (E_m) : تعويض

2)أ- نبين أن : $z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow im^2+2(1-i)m-3=0$

نعلم أن $z_1 z_2 = -im^2-2(1-i)m+4$ (جداء حلي معادلة من الدرجة الثانية)

وبالتالي :

$$z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow -im^2-2(1-i)m+4=1$$
$$\Leftrightarrow im^2+2(1-i)m-3=0$$

2)ب-لنحل في C المعادلة $im^2+2(1-i)m-3=0$:

المميز المختصر لهذه المعادلة هو $\delta=(1-i)^2+3i=i=\frac{1}{2}(2i)=\left(\sqrt{\frac{1}{2}}(1+i)\right)^2$

ومنه $m=\dfrac{-(1-i)-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}{i}$ أو $m=\dfrac{-(1-i)+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}{i}$

وبالتالي :

$$\boxed{m=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i \quad \text{أو} \quad m=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i}$$

الجزء الثاني :

1)أ)نبين ان :

نعتبر النقطة $I(1)$.

لدينا

$$\begin{aligned} S(M)=M' &\Leftrightarrow z'-1=-(z-1) \\ &\Leftrightarrow z_{M'}-z_I=-(z_M-z_I) \\ &\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{IM'}}=-z_{\overrightarrow{IM}} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{IM'}=-\overrightarrow{IM} \end{aligned}$$

وبالتالي

S هو التماثل المركزي الذي مركزه النقطة $I(1)$

1)ب)نبين ان $z''=iz+2$:

لدينا

$$\begin{aligned} M''=R(M) &\Leftrightarrow z''=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-1-i)+1+i \\ &\Leftrightarrow z''=i(z-1-i)+1+i \\ &\Leftrightarrow z''=iz+2 \end{aligned}$$

ومنه

$$\boxed{z''=iz+2}$$

2)أ) نحسب $\dfrac{z''-2}{z'-2}$:

لدينا : $\dfrac{z''-2}{z'-2}=\dfrac{iz}{-(z-1)-1}=-i$

استنتاج : لدينا $\dfrac{z''-2}{z'-2}=-i$

إذن : $\dfrac{z''-2}{z'-2}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$

ومنه $\left|\dfrac{z''-2}{z'-2}\right|=1$ و $\arg\left(\dfrac{z''-2}{z'-2}\right)\equiv\dfrac{-\pi}{2}\;[2\pi]$

وبالتالي : $\dfrac{AM''}{AM'}=1$ و $\left(\overrightarrow{AM'},\overrightarrow{AM''}\right)\equiv\dfrac{-\pi}{2}\;[2\pi]$. ومنه :

AM'M'' مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A .

2)ب) نحدد مجموعة النقط M حيث تكون النقط A و Ω و M' و M'' متداورة :

لتكن M نقطة من المستوى تخالف Ω و O . وبالتالي النقط A و Ω و M' و M'' مختلفة.

ومنه النقط A و Ω و M' وM'' متداورة يكافئ $\frac{z''-2}{z'-2}\times\frac{z'-1-i}{z''-1-i}\in\mathbb{R}$

يكافئ $\frac{z-1+i}{z-i-1}\in\mathbb{R}$

يكافئ $\frac{z-1+i}{z-i-1}=\overline{\left(\frac{z-1+i}{z-i-1}\right)}$

يكافئ $z+\bar{z}=2$

يكافئ $Re(z)=1$

في حالة $M=\Omega$ نجد أن $M'(1-i)$ و $M''=\Omega$.

ولدينا A و Ω و $M'(1-i)$ غير مستقيمية ومنه A و Ω و M' وM'' متداورة.

وعليه فإن :

مجموعة النقط M حيث تكون النقط A و Ω و M' وM'' متداورة هي المستقيم الذي معادلة $x=1$

التمرين الرابع :

الجزءالاول :

1)نتحقق من أن $e^x=x^n\Leftrightarrow n=f(x)$

ليكن x عنصرا من المجموعة $]0,1[\cup]1,+\infty[$. لدينا :

$$e^x=x^n\Leftrightarrow x=\ln x^n$$
$$\Leftrightarrow x=n\ln x$$
$$\Leftrightarrow n=f(x)$$

ومنه

$e^x=x^n\Leftrightarrow n=f(x)$

2)لنبين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 :

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\frac{1}{\ln x}=0$ لأن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\ln x=-\infty$

وبما أن $0\in\mathbb{R}$ فإن

f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 .

3)حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to1^-}\ln x=0^-$.

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to1^+}\ln x=0^+$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0^+$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

هندسيا : المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى (C).

المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل جوار $(+\infty)$.

4)ندرس تغيرات الدالة :

الدالة f قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]0,1[$ و $]1,+\infty[$ ولكل x من $]0,1[\cup]1,+\infty[$ لدينا :

$$f'(x)=\frac{\ln(x)-1}{(\ln x)^2}$$

ولدينا : $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=e$

و $f'(x)\prec 0 \Leftrightarrow x\in]0,1[\cup]1,e[$

نستنتج ان

f تزايدية قطعا على $[e,+\infty[$ وتناقصية قطعا على كل من المجالين $]0,1[$ و $]1,+\infty[$.

جدول تغيرات f هو :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $(+\infty)$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

5)نبين ان المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف :

الدالة f قابلة للإشتقاق مرتين على كل من المجالين $]0,1[$ و $]1,+\infty[$ ولكل x من $]0,1[\cup]1,+\infty[$ لدينا :

$$f''(x)=\frac{\frac{\ln^2 x}{x}-2\frac{\ln x}{x}(\ln(x)-1)}{(\ln x)^4}$$

$$=\frac{\ln x}{x(\ln x)^4}[\ln(x)(2-\ln x)]$$

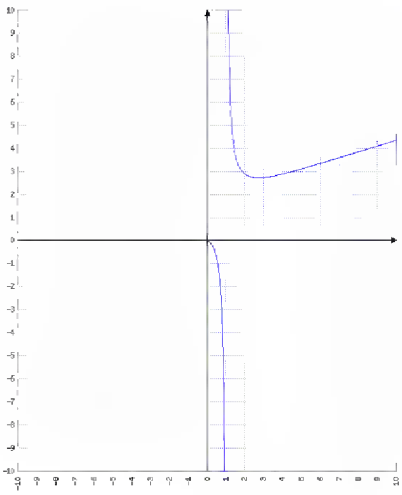
ولدينا :

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=2$$

$$\Leftrightarrow x=e^2$$

المشتقة الثانية للدالة f تنعدم في العدد e^2 وتغير إشارتها بجواره

إذن :



المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف زوج إحداثيتيها هو $\left(e^2,\frac{e^2}{2}\right)$.

6)إنشاء (C).

7)نفترض أن $n\geq 3$.

لدينا. $f(x)\in]-\infty,0]$ لكل x من $]0,1[$ إذن المعادلة لاتقبل حلا في $]0,1[$

الدالة. f متصلة و تناقصية قطعا على $]1,e]$

إذن $f(]1,e])=[e,+\infty[$

وبما أن $n\in[e,+\infty[$ فإنه يوجد عدد وحيد في $]1,e]$ حيث $f(a_n)=n$

الدالة. f متصلة و تزايدية قطعا على $]1,e]$

إذن f تقابل من $[e,+\infty[$ نحو $[e,+\infty[$.

وبما أن $n\in[e,+\infty[$ فإنه يوجد عدد وحيد b_n في $[e,+\infty[$ حيث $f(b_n)=n$.

ومنه :

لكل n من N حيث $n\geq 3$ ، المعادلة $f(x)=n$ أي (E) تقبل بالضبط حلين a_n و b_n ولدينا : $1\prec a_n\prec e\prec b_n$.

الجزء الثاني :

1)بين أن $b_n\geq n$: $(\forall n\geq 3)$

ليكن n من N حيث $n\geq 3$.

لدينا $f(b_n)=n$ و $b_n\in[e,+\infty[$.

ولدينا $b_n-f(b_n)=b_n-\dfrac{b_n}{\ln b_n}=b_n\left(\dfrac{\ln(b_n)-1}{\ln b_n}\right)$

ولدينا $b_n\in[e,+\infty[$ إذن $\ln b_n\succ 1$ وبالتالي $b_n\succ f(b_n)$ ومنه :

$$\boxed{(\forall n\geq 3)\quad b_n\succ n}$$

استنتاج : بما أن $b_n\succ n$ $(\forall n\geq 3)$ و $\lim(n)=+\infty$ فإن $\lim b_n=+\infty$

2)أ)نبين ان $(a_n)_{n\geq 3}$ تناقصية :

ليكن n من N حيث $n\geq 3$.

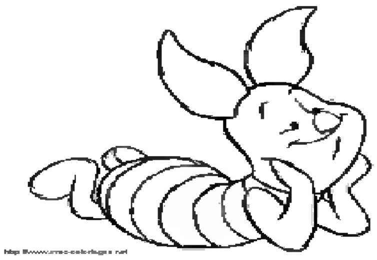
لدينا $f(a_n)=n$ و $f(a_{n+1})=n+1$

إذن : $f(a_{n+1})\succ f(a_n)$

وبما أن f تناقصية قطعا على $]1,e]$ فإن : $a_{n+1}\prec a_n$

ومنه : $a_{n+1}\prec a_n$ لكل n من N حيث $n\geq 3$.

وعليه فإن المتتالية $(a_n)_{n\geq 3}$ تناقصية .



استنتاج : بما أن المتتالية $(a_n)_{n\geq 3}$تناقصية ومصغورة بالعدد 1 فإنها منتقاربة .

2)ب)نبين أن $\dfrac{1}{n}\prec\ln a_n\prec\dfrac{e}{n}$ لكل n من N حيث $n\geq 3$.

ليكن n من N حيث $n\geq 3$.

لدينا $f(a_n)=n$ إذن $\dfrac{a_n}{\ln a_n}=n$ وبالتالي $a_n=n\ln a_n$

وحيث أن $1\prec a_n\prec e$ فإن $1\prec n\ln a_n\prec e$

وبالتالي $\dfrac{1}{n}\prec\ln a_n\prec\dfrac{e}{n}$ لكل n من N حيث $n\geq 3$.

استنتاج : لدينا $\dfrac{1}{n}\prec\ln a_n\prec\dfrac{e}{n}$: $(\forall n\geq 3)$

إذن : $e^{\frac{1}{n}}\prec a_n\prec e^{\frac{e}{n}}$: $(\forall n\geq 3)$

وحيث أن $\lim e^{\frac{1}{n}}=\lim e^{\frac{e}{n}}=1$ فإن

$\boxed{\lim a_n=1 \text{ (حسب مبرهنة الدركي ...احتراماتي وتقديراتي !)}}$

2)ج)نبين أن $\lim a_n^n=e$:

لدينا a_n حل للمعادلة (E) .

إذن $e^{a_n}=a_n^n$

بما أن $\lim a_n=1$ و الدالة الأسية النبيرية متصلة في 1

فإن $\lim e^{a_n}=e^1=e$

ومنه $\lim a_n^n=e$.

التمرين الخامس:

1)أ) نبين أن $(\forall x\geq 0):\ 0\leq F(x)\leq xe^{-x^2}$

ليكن x عددا حقيقيا موجبا . لدينا :

$$0\le t\le x \Rightarrow e^{-x^2}\le e^{-t^2}\le 1$$
$$\Rightarrow \int_0^x e^{-x^2}dt\le\int_0^x e^{-t^2}dt\le\int_0^x dt$$
$$\Rightarrow 0\le e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt\le e^{-x^2}\int_0^x dt$$
$$\Rightarrow 0\le F(x)\le xe^{-x^2}$$

ومنه : $(\forall x\ge 0):\ 0\le F(x)\le xe^{-x^2}$

1(ب)نبين أن $e^{-x^2}\le e^{-x}$; $(\forall x\ge 1)$

$$x\ge 1\Rightarrow x^2\ge x$$
$$\Rightarrow -x^2\le -x$$
$$\Rightarrow e^{-x^2}\le e^{-x}$$

ومنه : $e^{-x^2}\le e^{-x}$; $(\forall x\ge 1)$.

إستنتاج : لدينا $(\forall x\ge 0):\ 0\le F(x)\le xe^{-x^2}$

إذن $(\forall x\ge 1):\ 0\le F(x)\le xe^{-x}$

وبما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ فإن $\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}F(x)=0}\ .$$

2)نبين أن F قابلة للإشتقاق على $[0,+\infty[$ وأن $(\forall x\ge 0)$; $F'(x)=e^{-2x^2}-2xF(x)$

بما أن الدالة $t\mapsto e^{-t^2}$ متصلة على $[0,+\infty[$ فإن الدالة $x\mapsto\int_0^x e^{-t^2}dt$ قابلة للإشتقاق على المجال $[0,+\infty[$

ومنه F قابلة للإشتقاق على المجال $[0,+\infty[$ ولكل x من $[0,+\infty[$ لدينا :

وبالتالي : $F'(x)=-2xe^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+\left(e^{-x^2}\right)^2$

$$\boxed{(\forall x\ge 0)\ ;\ F'(x)==e^{-2x^2}-2xF(x)}$$

3)أ)نبين أن G متصلة على اليسار في $\frac{\pi}{2}$:

نضع $X=\tan x$ ولدينا: $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\tan x=+\infty$ إذن : $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}F(\tan x)=\lim_{X\to+\infty}F(X)=0$.

ومنه : $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}G(x)=G\left(\frac{\pi}{2}\right)$ وبالتالي :

$$\boxed{G\ \text{متصلة على اليسار في}\ \frac{\pi}{2}\ .}$$

3)ب) نبين أن $(\exists c\in]0,+\infty[):F'(c)=0$.

الدالة G متصلة على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ وقابلة للإشتقاق على المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ و $G(0)=G\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

إذن حسب مبرهنة رول يوجد عدد حقيقي c' من المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ حيث $G'(c')=0$.

وبالتالي $(1+\tan^2 c')F'(\tan c')=0 \quad ; \quad \left(\exists c'\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)$

ومنه : $F'(\tan c')=0 \quad ; \quad \left(\exists c'\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)$

وبما أن $c'\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ فإن $\tan c'\in\left]0,+\infty\right[$.

نأخذ $c=\tan c'$ ومنه :

$$\boxed{\left(\exists c\in\left]0,+\infty\right[\right) : F'(c)=0}.$$

وحيث أن $F'(x)=e^{-2x^2}-2xF(x)$ لكل x من $\left]0,+\infty\right[$ فإن : $e^{-2c^2}-2cF(c)=0$ أي أن: $F(c)=\frac{1}{2c}e^{-2c^2}$.

4)أ)لنبين أن H تناقصية على $\left]0,+\infty\right[$:

$$H(x)=\frac{e^{x^2}}{2x}\left(e^{-2x^2}-2xF(x)\right)$$
$$=\frac{e^{-x^2}}{2x}-\int_0^x e^{-t^2}dt$$

ومنه $H'(x)=\frac{-4x^2e^{-x^2}-2e^{-x^2}}{4x^2}-e^{-x^2}=\frac{-8x^2e^{-x^2}-2e^{-x^2}}{4x^2}<0$

إذن

$$\boxed{H \text{ تناقصية قطعا على } \left]0,+\infty\right[}$$

4)ب)نستنتج أن c وحيد :

لدينا $F'(x)=0 \Leftrightarrow H(x)=0$ لكل x من $\left]0,+\infty\right[$ و $H(c)=F'(c).\frac{e^{c^2}}{2c}=0$

وبما أن الدالة H تناقصية قطعا على $\left]0,+\infty\right[$. فإن : $H(c)=0 \quad ; \quad \left(\exists! c\in\left]0,+\infty\right[\right)$

وبالتالي $F'(c)=0 \quad ; \quad \left(\exists! c\in\left]0,+\infty\right[\right)$

جدول تغيرات F :

لدينا $H(x)=F'(x).\frac{e^{x^2}}{2x}$

بما أن x من $\left]0,+\infty\right[$ فإن إشارة $F'(x)$ هي إشارة $H(x)$.

لدينا H تناقصية على $\left]0,+\infty\right[$.

إذا كان $x\le c$ فإن $H(c)\le H(x)$ أي $0\le H(x)$

إذا كان $c\le x$ فإن $H(x)\le H(c)$ أي $H(x)\le 0$

ومنه F' موجبة على $\left]0,c\right]$ وسالبة على $\left[c,+\infty\right[$

جدول تغيرات F هو :

x	0		c		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
F	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2c}e^{-2c^2}$	$\searrow$	0

wadiiifi@hotmail.com

وفقكم اللـــــــــــــــــه