الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2012
الموضوع

المادة	الرياضيات	NS24	المعامل	9
الشعب(ة) أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)		مدة الإنجاز	4

- مدة إنجاز الموضوع هي أ ربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية....................(3.5ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية......................(3.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالحسابيات..........................(3ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل............................(5.5ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل............................(4.5ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لايسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول : (3.5 نقطة) الجزءان I و II مستقلان

I- في الحلقة الواحدية $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ ، نعتبر المصفوفتين $A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ و $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

1) احسب $I-A$ و A^2 | 0.75

2) استنتج أن A تقبل مقلوبا المطلوب تحديده . | 0.5

II - لكل عددين حقيقيين a و b من المجال $I=]1,+\infty[$ نضع : $a*b=\sqrt{a^2b^2-a^2-b^2+2}$

1) تحقق أن $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad ; \quad x^2y^2-x^2-y^2+2=(x^2-1)(y^2-1)+1$ | 0.25

2) بين أن * قانون تركيب داخلي في I | 0.5

3) نذكر أن $(\mathbb{R}^{*+},\times)$ زمرة تبادلية .

نعتبر التطبيق
$$\varphi: \mathbb{R}^{*+}\to I$$
$$x\mapsto\sqrt{x+1}$$

أ- بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^{*+},\times)$ نحو $(I,*)$ | 0.5

ب- استنتج بنية $(I,*)$ | 0.25

ج- بين أن المجموعة $\Gamma=\left\{\sqrt{1+2^m}\ /\ m\in\mathbb{Z}\right\}$ زمرة جزئية من $(I,*)$ | 0.75

التمرين الثاني : (3.5 نقطة) الجزءان I و II مستقلان

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

I-نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $(E): iz^2+(2-i)az-(1+i)a^2=0$ حيث a عدد عقدي غير منعدم.

1) حدد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) | 0.75

2) أ- تحقق أن : $z_1z_2=a^2(i-1)$ | 0.25

ب- بين أن : z_1z_2 عدد حقيقي $\Leftrightarrow$ $\arg a\equiv\frac{-3\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right]$ | 0.5

II- ليكن c عددا حقيقيا غير منعدم و z عددا عقديا غير منعدم .

نعتبر النقط A و B و C و D و M التي ألحاقها على التوالي هي: 1 و $1+i$ و c و ic و z

1) أ- بين أن: A و D و M مستقيمية $\Leftrightarrow$ $(ic+1)z+(ic-1)\overline{z}=2ic$ (لاحظ أن $c=\overline{c}$) | 0.5

ب- بين أن : $(AD)\perp(OM)$ $\Leftrightarrow$ $(ic+1)z-(ic-1)\overline{z}=0$ | 0.5

2) ليكن h لحق النقطة H، المسقط العمودي للنقطة O على (AD)

أ- بين أن : $h-(1+i)=\frac{i}{c}(h-c)$ | 0.75

ب- استنتج أن : $(CH)\perp(BH)$ | 0.25

التمرين الثالث:(3 نقط)

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E) : 143x-195y=52$

1) أ- حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 195 و 143 واستنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ | 0.5

ب- علما أن الزوج $(-1,-1)$ حل خاص للمعادلة (E) ، حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) مبرزا مراحل الحل . | 0.75

2) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم وأولي مع 5 | 0.5

بين أن لكل k من $\mathbb{N}$ لدينا: $n^{4k}\equiv 1\ [5]$

3) ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين بحيث: $x\equiv y\quad [4]$

أ- بين ان لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $n^x\equiv n^y\ [5]$ | 0.5

ب- استنتج أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $n^x\equiv n^y\ [10]$ | 0.5

4) ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين بحيث يكون الزوج (x,y) حلا للمعادلة (E) | 0.25

بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، العددان n^x و n^y لهما نفس رقم الوحدات في نظمة العد العشري .

التمرين الرابع:(5.5 نقطة)

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f_n(x)=x+\dfrac{e^{-x}}{n}$

ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ | 0.5

2) أ- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) بجوار $-\infty$ | 0.5

ب- بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_n) بجوار $+\infty$ ، وحدد الوضع النسبي للمنحنى (C_n) و (D) | 0.5

3) ادرس تغيرات الدالة f_n ثم ضع جدول تغيراتها . | 0.75

4) أنشئ المنحنى (C_3) (نأخذ $f_3(-1,5)\simeq 0$ و $f_3(-0,6)\simeq 0$ و $\ln 3\simeq 1,1$) | 0.75

5) أ- بين أنه إذا كان $n\geq 3$ فإن $\dfrac{e}{n}<\ln n$ | 0.25

ب- بين أنه إذا كان $n\geq 3$ فإن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل بالضبط حلين x_n و y_n حيث : | 1

$x_n\leq -\ln n$ و $\dfrac{-e}{n}\leq y_n\leq 0$

ج- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ | 0.5

6) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} g(x)=-1-x\ln x\ ;\ x>0 \\ g(0)=-1 \end{cases}$

أ- بين أن الدالة g متصلة على اليمين في 0 | 0.25

ب- تحقق أن لكل $n \geq 3$: $g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$ 0.25

ج-استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{x_n}$ 0.25

التمرين الخامس:(4.5 نقطة)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0,1]$ بما يلي : $F(0)=1$ و $F(x)=\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+2x)}{2x^2}$ لكل x من $]0,1]$

1) ليكن x من $[0,1]$. بين أن لكل t من $[0,x]$ لدينا : $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$ 0.25

2) ليكن x من $]0,1]$

أ- بين أن : $F(x)=\frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}dt$ 0.5

ب-بين أن : $\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$ ثم استنتج أن الدالة F متصلة على اليمين في الصفر . 0.75

3) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن لكل x من $[0,1]$: $\int_0^x \frac{2t}{1+2t}dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$ 0.75

4) ليكن x من $]0,1]$

أ- بين أن : $F'(x) = -\frac{4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$ 0.5

ب- بين أن $\frac{-4}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$ (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 1)) 0.75

ج- بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة F في المجال $[0,x]$ بين أن : 0.75

$$\frac{-4}{3} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

د- استنتج أن الدالة F قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 محددا عددها المشتق على اليمين في 0 0.25

انتهى الموضوع