

تمرين 1:

$$(E): z^2 - (5+i\sqrt{3})z + 4 + 4i\sqrt{3} = 0$$

$$\Delta = (5+i\sqrt{3})^2 - 4(4+4i\sqrt{3}) = 25 + 10i\sqrt{3} - 3 - 16 - 16i\sqrt{3} = 6 - 6i\sqrt{3} = 9 - 6i\sqrt{3} - 3 = (3-i\sqrt{3})^2$$

$$a = \frac{5+i\sqrt{3}-3+i\sqrt{3}}{2} = 1+i\sqrt{3} \quad , \quad b = \frac{5+i\sqrt{3}+3-i\sqrt{3}}{2} = 4$$

$$b = (1-i\sqrt{3})a \quad : \quad \text{إذن} \quad a(1-i\sqrt{3}) = (1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3}) = 1+3 = 4 = b$$

أ) الصيغة العقدية للدوران $R\left(A, \frac{f}{2}\right)$ هي: $z' = e^{\frac{f}{2}i}(z-a) + a = i(z-a) + a$ ، بما $B_1 = R(O)$ أن فإن:

$$b_1 = i(0-a) + a = -ia + a = -i(1+i\sqrt{3}) + 1+i\sqrt{3} = -i - \sqrt{3} + 1+i\sqrt{3} = 1 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3}-1)$$

ب) الصيغة العقدية للتعاكي h هي: $z' = k(z-a) + a = \sqrt{3}(z-a) + a$ ،

$$b'_1 = \sqrt{3}(b_1-a) + a = \sqrt{3}(-ia) + a = a(1-i\sqrt{3}) = b \quad : \quad \text{إذن} \quad B'_1 = R(B_1)$$

إذن $B'_1 = B$: منه $B = R(B_1)$

$$\frac{b}{b-a} = \frac{b}{a-i\sqrt{3}a-a} = \frac{b}{-a\sqrt{3}i} = \frac{\frac{b}{a}}{-\sqrt{3}i} = \frac{1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}i} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{f}{3}i} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{f}{6}i}$$

لدينا: $\arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \frac{f}{6}[2f]$ بالتالي:

بما أن C تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OAB فإن النقط O و A و B و C متداورة

د) منه: $\frac{c-0}{c-a} \div \frac{b-0}{b-a} \in IR$: منه $\arg\left(\frac{c-0}{c-a} \div \frac{b-0}{b-a}\right) \equiv 0[f]$: منه $\arg\left(\frac{c}{c-a}\right) - \arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv 0[f]$

منه: $\arg\left(\frac{c}{c-a}\right) \equiv \frac{f}{6}[f]$

تمرين 2: $x^{1439} \equiv 1436[2015]$

1) بما أن: $1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1$ فحسب مبرهنة بيزو «Bezout» فإن: $1436 \wedge 2015 = 1$

أ) لدينا: $x^{1439} \equiv 1436[2015]$: إذن $x^{1439} - 2015k = 1436$: $\exists k \in Z /$
لدينا d/x و $d/2015$ منه: d/x^{1436} و $d/2015k$ منه: $d/x^{1439} - 2015k$ بالتالي: $d/1436$

2) نضع: $x \wedge 2015 = d$ ، إذن d/x و $d/2015$: إذن حسب السؤال السابق: $d/1436$
ب) إذن: $d/1436 \times 1051 - 2015 \times 749$ ولدينا: $d/2015$: إذن: $d/2015 \times 749$: إذن: $d/1436 \times 1051 - 2015 \times 749$
منه: $d/1$ ، وبما أن: $d > 0$: فإن $d = 1$ ، بالتالي: $x \wedge 2015 = 1$

لدينا: $2015 = 5 \times 13 \times 31$ ، بما أن: $x \wedge 2015 = 1$: فإن $x \wedge (5 \times 13 \times 31) = 1$: إذن $x \wedge 5 = 1$
 $x \wedge 13 = 1$
 $x \wedge 31 = 1$

3) إذن حسب مبرهنة فيرما نستنتج أن: $x^4 \equiv 1[5]$ ، $x^{12} \equiv 1[13]$ ، $x^{30} \equiv 1[31]$
بالتالي: $x^{1404} \equiv 1[5]$ ، $x^{1404} \equiv 1[13]$ ، $x^{1404} \equiv 1[31]$
منه: $(x^4)^{360} \equiv 1[5]$ ، $(x^{12})^{120} \equiv 1[13]$ ، $(x^{30})^{48} \equiv 1[31]$

	<p>لدينا : $x^{1404} \equiv 1[5]$ إذن : $\begin{cases} 5/x^{1404} - 1 \\ 13/x^{1404} - 1 \end{cases}$ منه : $(5 \vee 13)/x^{1404} - 1$ أي : $65/x^{1404} - 1$ أي : $x^{1404} \equiv 1[65]$</p> <p>مرة أخرى لدينا : $x^{1404} \equiv 1[31]$ إذن : $\begin{cases} 65/x^{1404} - 1 \\ 31/x^{1404} - 1 \end{cases}$ منه : $(65 \vee 31)/x^{1404} - 1$ أي : $2015/x^{1404} - 1$ أي : $x^{1404} \equiv 1[2015]$</p>	ب
4	<p>لدينا : $x^{1404} \equiv 1[2015]$ و $x^{1440} \equiv 1436x[2015]$ منه : $x^{1439} \equiv 1436[2015]$ إذن : $1436x \equiv 1[2015]$ $\exists r \in \mathbb{Z} / 1436x - 2015r = 1$ منه : $1436x - 2015r = 1436 \times 1051 - 2015 \times 749$ منه : $1436(x - 1051) = 2015(r - 749)$ منه : $1436x - 2015r = 1436 \times 1051 - 2015 \times 749$ منه : $2015/1436(x - 1051)$ ، و بما أن : $2015 \wedge 1436 = 1$ فإن $2015/(x - 1051)$ أي : $x \equiv 1051[2015]$</p>	
تمرين 3 :		
	<p>$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad M(x)TM(y) = M(x+y+1)$ ، $E = \{M(x) / x \in \mathbb{R}\}$ ، $M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}$</p> <p>$\{ : \mathbb{R} \rightarrow E$ $x \mapsto \{ (x) = M(x-1)$</p>	
1	<p>لدينا : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \{ (x+y) = M(x+y-1)$ و $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \{ (x)T\{ (y) = M(x-1)TM(y-1) = M(x-1+y-1+1) = M(x+y-1)$ إذن : $\{ (x+y) = \{ (x)T\{ (y)$ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ، إذن : $\{$ تشاكل من $(\mathbb{R}, +)$ نحو (E, T)</p>	أ
ب	<p>لدينا $\forall x \in \mathbb{R} \quad \{ (x+1) = M(x)$ إذن $\forall m \in \mathbb{R} / \{ (m) = M$ $\forall M \in E \exists m \in \mathbb{R} / \{ (m) = M$ أي أن $\{$ شمول أي : $(\mathbb{R}) = E$ إذن و بما أن : $(\mathbb{R}, +)$ زمرة تبادلية فإن (E, T) زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو : $\{ (0) = M(-1)$</p>	ب
أ	<p>لدينا لكل $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:</p> $M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-y & y \\ -2y & 1+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-x)(1-y) - 2xy & y(1-x) + x(1+2y) \\ -2x(1-y) - 2y(1+2x) & -2xy + (1+2x)(1+2y) \end{pmatrix}$ $M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} 1-x-y+xy-2xy & y-xy+x+2xy \\ -2x+2xy-2y-4xy & -2xy+1+2y+2x+4xy \end{pmatrix}$ $M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} 1-x-y-xy & y+x+xy \\ -2x-2y-2xy & 1+2y+2x+2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(x+y+xy) & y+x+xy \\ -2(x+y+xy) & 1+2(x+y+xy) \end{pmatrix}$ <p>$M(x) \times M(y) = M(x+y+xy)$</p>	أ
ب	<p>بما أن : $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x+y+xy \in \mathbb{R}$ فإن : $(M(x), M(y)) \in E^2 \Rightarrow M(x+y+xy) \in E \Rightarrow M(x) \times M(y) \in E$ إذن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ ، ولدينا أيضا :</p> <p>$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad M(x) \times M(y) = M(x+y+xy) = M(y+x+xy) = M(y) \times M(x)$ أي أن القانون \times تبادلي</p>	ب
ج	<p>لدينا : لكل $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:</p> $M(x) \times (M(y)TM(z)) = M(x) \times M(y+z+1) = M(x+y+z+1+x(y+z+1))$ $M(x) \times (M(y)TM(z)) = M(2x+y+z+xy+xz+1)$ <p>و $(M(x) \times M(y))T(M(x)TM(z)) = M(x+y+xy)TM(x+z+xz) = M(x+y+xy+x+z+xz+1)$</p> $(M(x) \times M(y))T(M(x)TM(z)) = M(2x+y+z+xy+xz+1)$ <p>منه : $M(x) \times (M(y)TM(z)) = (M(x) \times M(y))T(M(x)TM(z))$ و لكون القانونين \times و T تبادليان فإن : $(M(y)TM(z)) \times M(x) = (M(y) \times M(x))T(M(z)TM(x))$ إذن : \times توزيعي بالنسبة لـ T في E</p>	ج
د	<p>لدينا : $\forall x \in \mathbb{R} \quad M(x)TM(-1) = M(-1)TM(x) = M(x-1+1) = M(x)$</p>	د

إذن $M(-1)$ هي العنصر المحايد في (E, T)
ولدينا: $M(0) = I$ و $\forall x \in IR \quad M(x) \times M(0) = M(0) \times M(x) = M(x+0+0) = M(x)$ ،
إذن: I هي العنصر المحايد في (E, \times)

أ

3

ب

لدينا: $M(-1)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد: $M(-1)$
القانون \times قانون تركيب داخلي تبادلي في E و تجميعي لأن $E \subset M_2(IR)$ و $(M_2(IR), \times)$ تجميعي
القانون \times توزيعي بالنسبة لـ T في E و له عنصر محايد هو: $I = M(0)$
إذن: (E, T, \times) حلقة واحدة، و بما أن لكل $M(x) \in E - \{M(-1)\}$ مماثلاً بالنسبة للقانون \times هو
إذن: $M\left(\frac{-x}{1+x}\right)$ فإن (E, T, \times) جسم تبادلي

التمرين الرابع:

الجزء الأول:

$$\begin{cases} f(x) = x(1 + \ln^2 x); & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 + \ln^2 x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ (لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \ln^2 x) = +\infty$)
و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \ln^2 x) = +\infty$
ما يعني أن (C) يقبل فرعاً شلجماً باتجاه محور الأرتايب جوار $+\infty$

أ

لدينا: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x + x \ln^2 x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x + (\sqrt{x} \ln x)^2 = 0 + 0^2 = 0 = f(0)$
إذن f متصلة يمين الصفر

للتذكير: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^r \ln(x) = 0$ حيث $r \in \mathbb{Q}^{*+}$ (في حالتنا: $r = \frac{1}{2}$)

2

ب

لدينا: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ (لأن: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 1 + \ln^2 x = +\infty$)
إذن $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$ ، ما يعني أن الدالة غير قابلة للاشتقاق يمين الصفر ، لكن المنحنى (C)
يقبل نصف مماس عمودي في النقطة O له نفس منحنى المتجهة \vec{j}

ليس من الضروري تحديد منحنى نصف المماس ، لكنه يساعد على اكتشاف أي خطأ في جدول التغيرات لاحقاً

المنحنى نعرفه انطلاقاً من إشارة النتيجة و يمين أو يسار النهاية (في حالتنا $\rightarrow +$) $\left\{ \begin{matrix} +\infty \\ 0^+ \end{matrix} \right\} (+) \times (+) \rightarrow +$ أي الأعلى أي منحنى \vec{j}

ج

لدينا: $\forall x > 0 \quad f'(x) = 1 + \ln^2 x + x \left(2 \ln x \times \frac{1}{x} \right) = 1 + \ln^2 x + 2 \ln x = (\ln x + 1)^2$
لدينا: $(\ln x + 1)^2 \geq 0 \quad \forall x > 0$ ، و $(\ln x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$

إذن $f'(x)$ موجبة على $]0; +\infty[$ و تنعدم في عدد وحيد ، إذن f تزايدية قطعاً على $]0; +\infty[$

الرتابة القطعية تستوجب أحد حالتين:

- أن تكون المشتقة لها إشارة سالبة قطعاً أو موجبة قطعاً على كل المجال
- أن تكون موجبة أو سالبة و أن تنعدم في عدد محدود من الحلول (حل، حلان...)

	<p>لدينا لكل $f''(x) = 2(\ln x + 1) \times \frac{1}{x} = \frac{2}{x}(\ln x + 1) : x \in]0; +\infty[$</p> <p>ولدينا: $\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > e^{-1}$ و $\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$</p> <p>إذن: $f''(x)$ تنعدم و تغير إشارتها في e^{-1} إذن فالمنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف I أفصولها e^{-1}</p>	أ
	<p>لدينا لكل $f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ و $f(x) - x = x \ln^2 x \geq 0 : x \in]0; +\infty[$</p> <p>إذن (C) يوجد فوق المستقيم $y = x$ (D): و يقطعه في النقطة $A(1;1)$</p>	ب
	<p>دراسة الوضع النسبي تستوجب أيضا دراسة نقط التقاطع</p> <p>الشكل تم إنشاؤه باستخدام برنامج الموقع : Super Graph</p>	ج
	<p>الجزء الثاني:</p> $\begin{cases} u_0 = e^{-1} \\ u_{n+1} = f(u_n) ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$	
	<p>1 نعلم أن: $e > 1$ إذن: $\frac{1}{e} \leq \frac{1}{e} < 1$ أي: $\frac{1}{e} \leq u_0 < 1$</p> <p>نفترض أن: $\frac{1}{e} \leq u_n < 1$، إذن: $f\left(\frac{1}{e}\right) \leq f(u_n) < f(1)$ (لأن f تزايدية على $]0; +\infty[$)</p> <p>منه: $\frac{2}{e} \leq u_{n+1} < 1$ منه: $\frac{1}{e} \leq u_{n+1} < 1$ (لأن: $\frac{1}{e} < \frac{2}{e}$)، إذن حسب مبدأ التراجع: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{e} \leq u_n < 1$</p>	1
	<p>لدينا: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = u_n \ln^2(u_n)$</p> <p>ولدينا: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{e} \leq u_n < 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} \ln(u_n) < 0 \\ u_n > 0 \end{cases} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \ln^2(u_n) > 0$</p> <p>إذن: $(u_n)_n$ متتالية تزايدية قطعاً، وبما أنها مكبورة بالعدد 1 فهي متقاربة.</p>	2
	<p>يمكن أيضا استعمال السؤال 3 ب) من الجزء الأول</p>	

	<p>أ) لدينا : $\frac{1}{e} \leq u_n < 1$ و $\forall n \in \mathbb{N}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$ ، إذن : $\frac{1}{e} \leq l \leq 1$</p>	أ)
	<p>ب) لدينا: الدالة f متصلة على $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$ و $\left[\frac{1}{e}; 1\right] \subset \left[\frac{2}{e}; 1\right] \subset \left[\frac{1}{e}; 1\right]$ والمتتالية $(u_n)_n$ متقاربة نهايتها l إذن l تحقق المعادلة $f(x) = x$ و التي حسب الجزء الأول تقبل حلين بالظبط 1 و 0 ولكون : $\frac{1}{e} \leq l \leq 1$ ، فإن : $l = 1$</p>	3
	<p>الجزء الثالث: $\forall x \in [0; +\infty[\quad F(x) = \int_1^x f(t) dt$</p>	
	<p>أ) لدينا لكل $x \in]0; +\infty[$: $H'(x) = \left(\frac{-1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x^2 \ln x \right)' = \frac{-2}{4} x + \frac{1}{2} \left(2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} \right) = \frac{-1}{2} x + x \ln x + \frac{1}{2} x = x \ln x = h(x)$ إذن الدالة H هي دالة أصلية للدالة h</p>	أ)
	<p>ب) لدينا لكل $x \in]0; +\infty[$: $\int_1^x t \ln^2(t) dt = \int_1^x \left(\frac{1}{2} t^2 \right)' \ln^2(t) dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \ln^2(t) \right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{2} t^2 \cdot 2 \ln(t) \times \frac{1}{t} dt = \frac{x^2}{2} \ln^2(x) - \int_1^x t \ln(t) dt$</p>	1
	<p>ج) لدينا لكل $x \in]0; +\infty[$: $F(x) = \int_1^x t (1 + \ln^2(t)) dt = \int_1^x t + t \ln^2(t) dt = \int_1^x t dt + \int_1^x t \ln^2(t) dt$ $F(x) = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_1^x + \frac{x^2}{2} \ln^2(x) - \left[\frac{-1}{4} t^2 + \frac{1}{2} t^2 \ln t \right]_1^x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} \ln^2(x) - \left(\frac{-x^2}{4} + \frac{x^2}{2} \ln x \right) + \left(\frac{-1}{4} \right)$ $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} \ln^2(x) + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} = \frac{-3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{2} \ln^2(x)$</p>	1
	<p>أ) نعلم أن الدالة f متصلة على $[0; +\infty[$ ، إذن فهي تقبل دالة أصلية k متصلة و قابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$ ، ومنه : $F(x) = k(x) - k(1)$ ، $\forall [0; +\infty[$ ، ما يعني أن الدالة F متصلة على $[0; +\infty[$</p> <p>ب) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{2} \ln^2(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{(x \ln x)^2}{2}$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) = \frac{-3}{4} + 0 - 0 + 0 = \frac{-3}{4}$ بما أن F متصلة يمين الصفر حسب السؤال السابق فإن : $\int_0^1 f(t) dt = -\int_1^0 f(t) dt = -F(0) = -\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) = \frac{3}{4}$</p>	2
التمرين الخامس :		
	$\begin{cases} g(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt ; x > 0 \\ g(0) = \ln 2 \end{cases}$	
	<p>أ) ليكن $x > 0$ ، لدينا : $e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x} \Rightarrow -2x \leq -t \leq -x \Rightarrow x \leq t \leq 2x \Rightarrow t \in [x, 2x]$ إذن : $(\forall x > 0) (\forall t \in [x, 2x]) e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x}$</p>	أ)
	<p>ب) حسب السؤال السابق نستنتج أن : $(\forall x > 0) (\forall t \in [x, 2x]) \frac{e^{-2x}}{t} \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{e^{-x}}{t}$ منه : $(\forall x > 0) \int_x^{2x} \frac{e^{-2x}}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{-x}}{t} dt$</p>	1

منه: $(\forall x > 0) \quad e^{-2x} \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \leq g(x) \leq e^{-x} \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$ أي: $(\forall x > 0) \quad e^{-2x} [\ln t]_x^{2x} \leq g(x) \leq e^{-x} [\ln t]_x^{2x}$
 منه: $(\forall x > 0) \quad e^{-2x} (\ln 2x - \ln x) \leq g(x) \leq e^{-x} (\ln 2x - \ln x)$
 بالتالي: $(\forall x > 0) \quad e^{-2x} \ln 2 \leq g(x) \leq e^{-x} \ln 2$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-2x} \ln 2 = \ln 2$ و $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} \ln 2 = \ln 2$ فإن: $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \ln 2 = g(0)$ ، إذن g متصلة يمين 0 (ج)

بما أن الدالة $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ متصلة على $]0; +\infty[$ فهي تقبل دالة أصلية G متصلة و قابلة للاشتقاق على هذا المجال، ولدينا، لكل $x > 0$: $g(x) = G(2x) - G(x)$ ، وبما أن $x \mapsto 2x$ قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ فإن الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ولدينا:

$$\forall x > 0 \quad g'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2 \frac{e^{-2x}}{2x} - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$$

ليكن $t > 0$ ، الدالة $p: x \mapsto e^{-x}$ متصلة على $[0, t]$ و قابلة للاشتقاق على $]0, t[$ (لأنها متصلة و قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$)، إذن حسب مبرهنة التزايد المتناهية:

$$\exists c_t \in]0, t[\quad \frac{p(t) - p(0)}{t} = p'(c_t)$$

$$\exists c_t \in]0, t[\quad \frac{e^{-t} - 1}{t} = -e^{-c_t} \quad \text{منه: } \forall x > 0 \quad p'(x) = -e^{-x}$$

$$\text{ولدينا: } \forall x > 0 \quad p'(x) = -e^{-x} \Rightarrow -1 < -e^{-c_t} < -e^{-t} \Rightarrow e^{-t} < e^{-c_t} < 1 \Rightarrow -1 < -e^{-c_t} < -e^{-t}$$

$$\text{منه: } -1 < \frac{e^{-t} - 1}{t} < -e^{-t}$$

$$\text{بالتالي: } \forall t > 0 \quad -1 < \frac{e^{-t} - 1}{t} < -e^{-t} \quad \text{أو أيضا: } \forall t > 0 \quad -1 \leq \frac{e^{-t} - 1}{t} \leq -e^{-t}$$

$$\text{لدينا: } \forall t > 0 \quad -1 \leq \frac{e^{-t} - 1}{t} \leq -e^{-t} \quad \text{منه: } \forall x > 0 \quad \int_x^{2x} -1 dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt \leq \int_x^{2x} -e^{-t} dt$$

$$\text{منه: } \forall x > 0 \quad [-t]_x^{2x} \leq \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \leq [e^{-t}]_x^{2x}$$

$$\text{منه: } \forall x > 0 \quad -2x + x \leq g(x) - \ln 2 \leq e^{-2x} - e^{-x}$$

$$\text{بالتالي: } \forall x > 0 \quad -1 \leq \frac{g(x) - \ln 2}{x} \leq \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$$

$$\text{بما أن: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{x} - \frac{e^{-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -2 \frac{e^{-2x} - 1}{-2x} + \frac{e^{-x} - 1}{-x} = -2 \times 1 + 1 = -1$$

و $\lim_{x \rightarrow 0} -1 = -1$ ، فإن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - \ln 2}{x} = -1$ أي: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = -1$ ، ما يعني أن g قابلة للاشتقاق يمين الصفر. (ج)