



المادة:	الرياضيات	المعامل:	9
الشعب (ة):	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	مدة الإنجاز:	45

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة

التمرين الأول: (3,5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) .

نعتبر التطبيق r الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة $M_1(z_1)$ حيث: $z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}z + \frac{\sqrt{3}+i}{2}$

و التطبيق h الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة $M_2(z_2)$ حيث: $z_2 = -2z + 3i$ ونضع $F = h \circ r$

(1) حدد طبيعة كل من التطبيقين r و h وعناصرهما المميزة.

(2) نعتبر النقطتين $\Omega(i)$ و $A(a)$ حيث a عدد عقدي معلوم مخالف للعدد i .

ونضع: $B = F(A)$ و $C = F(B)$ و $D = F(C)$

(أ) بين أنه إذا كانت النقطة $M'(z')$ هي صورة النقطة $M(z)$ بالتطبيق F فإن:

$$z' - i = 2e^{\frac{4\pi}{3}}(z - i)$$

(ب) تحقق أن Ω هي النقطة الوحيدة التي تحقق: $F(\Omega) = \Omega$

(3) (أ) حدد بدلالة العدد العقدي a الأعداد العقدية b و c و d الحاق النقط B و C و D على التوالي.

(ب) بين أن النقط Ω و A و D مستقيمة.

(ج) بين أن Ω هو مرجح النظمة المتزنة $\{(B, 4); (C, 2); (D, 1)\}$

(د) حدد مجموعة النقط $A(a)$ لكي تكون النقطة D تنتمي إلى المحور الحقيقي.

التمرين الثاني: (4 نقط)

نرود المجموعة \mathbb{R} بقانون التركيب الداخلي * المعروف بما يلي:

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2); x * y = x + y - 3xy$$

(1) (أ) تحقق أن: $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2); (1 - 3x)(1 - 3y) = 1 - 3(x * y)$

ب) بين أن $(\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}, *)$ زمرة تبادلية.

0,75

(2) أ) بين أن التطبيق φ الذي يربط كل عدد حقيقي x بالعدد الحقيقي

0,5

$$\varphi(x) = 1 - 3x \quad \text{تشاكل تقابلي من } (\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}, *) \text{ نحو } (\mathbb{R}^*, \times)$$

$$\text{ب) بين أن : } \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*) = \left] -\infty, \frac{1}{3} \right[$$

0,25

$$\text{ج) بين أن } \left] -\infty, \frac{1}{3} \right[, * \text{ زمرة جزئية للزمرة } (\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}, *)$$

0,5

(3) لكل x من المجموعة $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ ولكل n من \mathbb{N} نضع : $x^{(0)} = 0$

$$\text{و } (\forall n \in \mathbb{N}) ; x^{(n+1)} = x^{(n)} * x$$

$$\text{أ) بين أن : } \varphi(x^{(n)}) = (\varphi(x))^n ; (\forall n \in \mathbb{N}) ; \left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\} \right)$$

0,25

ب) استنتج $x^{(n)}$ بدلالة x و n .

0,5

(4) نزود المجموعة \mathbb{R} بقانون التركيب الداخلي T المعروف بما يلي :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) ; xTy = x + y - \frac{1}{3}$$

أ) بين أن (\mathbb{R}, T) زمرة تبادلية.

0,5

ب) بين أن $(\mathbb{R}, T, *)$ جسم تبادلي.

0,5

التمرين الثالث: (5,2 نقط)

يحتوي صندوق على أربع كرات: كرة بيضاء و ثلاث كرات حمراء غير قابلة للتمييز باللمس .

نسحب عشوائيا كرة من الصندوق، نسجل لونها، ثم نعيدها إلى الصندوق.

نجري نفس التجربة لمرات متتالية إلى أن نحصل لأول مرة على كرتين متتابعتين من نفس اللون

و نوقف التجربة .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي رتبة السحبة التي توقفت فيها التجربة.

(1) احسب احتمال كل حدث من الحدثين التاليين : $[X = 2]$ و $[X = 3]$

ان

(2) ليكن k عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

أ) بين أن احتمال الحدث $[X = 2k]$ هو $p_{2k} = \frac{5}{8} \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$ 0,75 ن

ب) بين أن احتمال الحدث $[X = 2k + 1]$ هو $p_{2k+1} = \left(\frac{3}{16}\right)^k$ 0,75 ن

التمرين الرابع: (10 نقط)

I- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{x} ; & x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) بين أن الدالة f متصلة في الصفر. 0,5 ن

(2) لكل عدد حقيقي غير منعدم a من المجال I نعتبر الدالة العددية h_a للمتغير الحقيقي x المعرفة على

المجال I بما يلي: $h_a(x) = (\ln(1+2a) - 2a)x^2 - (\ln(1+2x) - 2x)a^2$

أ) احسب $h_a(a)$ و $h_a(0)$ ثم استنتج أنه يوجد عدد حقيقي b محصور بين 0 و a بحيث:

$$\frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b} \quad 0,5 ن$$

ب) استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق في الصفر و أن: $f'(0) = -2$. 0,75 ن

(3) أ) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $I \setminus \{0\}$ 0,5 ن

و أن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$; حيث $(\forall x \in I \setminus \{0\})$ $g(x) = 2x - (1+2x)\ln(1+2x)$

ب) بين أن: $(\forall x \in I \setminus \{0\}) ; g(x) < 0$ 0,5 ن

ج) استنتج تغيرات الدالة f على المجال I. 0,25 ن

(4) أ) احسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليهما. 0,5 ن

(ب) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[1, 2]$ بحيث $f(\alpha) = 1$ 0,5

(ج) أنشئ المنحنى (C) (نأخذ : $\alpha \approx 1,3$) 0,5

(1 - II) نضع : $J = [1, \alpha]$ و $\varphi(x) = \ln(1 + 2x)$ ($\forall x \in I$) .

(أ) بين الدالة φ قابلة للاشتقاق على المجال J و أن : $0 < \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$ ($\forall x \geq 1$) 0,5

(ب) تحقق أن : $\varphi(\alpha) = \alpha$ و أن : $\varphi(J) \subset J$ 0,75

(2) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n)$ ($\forall n \geq 0$)

(أ) بين أن : $u_n \in J$ ($\forall n \geq 0$) 0,5

(ب) بين أن : $|\alpha - u_n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ($\forall n \geq 0$) 0,5

(ج) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها. 0,5

III- نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال I بما يلي : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

(1) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال I ثم أحسب $F'(x)$ 0,5

(ب) استنتج منحي تغيرات الدالة F على المجال I . 0,25

(2) بين أن : $F(x) \geq \int_1^x \frac{\ln(1+2t)}{1+2t} dt$ ($\forall x \geq 1$) 0,5

(ب) استنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ 0,5

(3) نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية ℓ على اليمين في $-\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \tilde{F}(x) = F(x) ; x \in I \\ \tilde{F}\left(-\frac{1}{2}\right) = \ell \end{cases}$$

ونعتبر الدالة \tilde{F} المعرفة على المجال $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ بما يلي :

(أ) باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن : $F(x) - \ell \geq f(x) \left(x + \frac{1}{2}\right)$ ($\forall x \in I$) 0,5

(ب) استنتج أن الدالة \tilde{F} غير قابلة للاشتقاق على اليمين في $-\frac{1}{2}$ 0,5