المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم العالي
وتكوين الأطر
والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2009
الموضوع

المعامل:	9	المــــادة:	الرياضيات
مدة الإنجاز:	4	الشعب(ة) أو المسلك :	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)

يسمح استعمال الآلة الحاسبة

التمرين الأول : (3 نقط)

نذكر أن $\left(M_2(\mathbb{R}),+,\times\right)$ حلقة واحدية وحدتها المصفوفة $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و أن $\left(M_2(\mathbb{R}),+,\bullet\right)$ فضاء متجهي حقيقي .

لتكن V مجموعة المصفوفات $M_{(a,b)}=\begin{pmatrix}a&b\\4b&a\end{pmatrix}$ حيث $(a;b)\in IR^2$

0,75 — 1- بين أن V فضاء متجهي جزئي من $\left(M_2(\mathbb{R}),+,\bullet\right)$ وحدد أساسا له .

0,25 — 2-أ)بين أن V جزء مستقر من $\left(M_2(\mathbb{R}),\times\right)$

0,5 — ب) بين أن $(V,+,\times)$ حلقة واحدية تبادلية .

0,25 — 3-أ)احسب $M_{\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{4}\right)}\times M_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)}$

0,25 — ب) هل الحلقة $(V,+,\times)$ جسم؟

4- لتكن X مصفوفة من V حيث : $X=\begin{pmatrix}a&b\\4b&a\end{pmatrix}$ مع $(a,b)\in IR^2$

0,5 — أ) بين أن : $X^2-2aX+(a^2-4b^2)I=O$ حيث , O هي المصفوفة المنعدمة .

0,5 — ب) نفترض أن : $a^2-4b^2\neq 0$

بين أن المصفوفة X تقبل مقلوبا في V ينبغي تحديده.

التمرين الثاني : (4 نقط)

ليكن u عددا عقديا يخالف $(1-i)$

0,25 — 1) أ ــ أنشر $(iu-1-i)^2$

0,75 — ب ــ حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$z^2-2(u+1-i)z+2u^2-4i=0$$

2) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر.

نعتبر النقط $A\left((1+i)u-2i\right)$ و $B\left((1-i)u+2\right)$ و $U(u)$ و $\Omega(2-2i)$

0,5 — أ ــ حدد لحق النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ ثم حدد متجهة الإزاحة t التي تحول النقطة U إلى النقطة I

0,5 — ب ــ ليكن R الدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. بين أن $R(A)=B$

ج – استنتج أن (ΩI) و (AB) متعامدان. 0,5

د – انطلاقا من النقطة U وضح طريقة لإنشاء النقطتين A و B 0,75

3) نضع $u=a(1+i)-2i$ حيث $(a\in\mathbb{R})$

أ) حدد لحقي المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AU}$ بدلالة a 0,5

ب) استنتج أن النقط A و B و U مستقيمية. 0,25

التمرين الثالث : (3 نقط)

n عدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي 4 .

لدينا ثلاث صناديق U_1 و U_2 و U_3 .

الصندوق U_1 يحتوي على كرة حمراء واحدة و $(n-1)$ كرة سوداء.

الصندوق U_2 يحتوي على كرتين حمراوين و $(n-2)$ كرة سوداء.

الصندوق U_3 يحتوي على ثلاث كرات حمراء و $(n-3)$ كرة سوداء.

نعتبر التجربة العشوائية التالية: نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق الثلاثة ثم نسحب تآنيا كرتين من الصندوق الذي وقع عليه الاختيار.

ليكن X المتغير العشوائي الحقيقي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

1- حدد قيم المتغير العشوائي X 0,25

2- أ) بين أن احتمال الحدث $(X=2)$ يساوي $\dfrac{8}{3n(n-1)}$ 0,75

ب) بين أن احتمال الحدث $(X=1)$ يساوي $\dfrac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$ 0,75

ج) استنتج قانون احتمال المتغير العشوائي X 0,5

3- علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين، ما هو احتمال أن يكون السحب قد تم من الصندوق U_3 ؟ 0,75

مسألة: (10 نقط)

I – نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $g(x)=2(1-e^{-x})-x$

1) أ – ادرس تغيرات الدالة g 0,5

ب – ضع جدول تغيرات الدالة g 0,5

2) أ – بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]\ln 4,\ln 6[$

(نأخذ $\ln 2\approx 0,7$ و $\ln 3\approx 1,1$) 0,5

ب – ادرس إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^+$ 0,5

3) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=2(1-e^{-u_n})$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ – بين أن $1\le u_n<\alpha$ لكل n من $\mathbb{N}$ 0,5

ب – بين أن $u_{n+1}-u_n=g(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$ 0,25

ج – بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا . | 0,25

د – بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | 0,5

II – نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{1-e^x}{x^2}$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ | 1

2) أ – تحقق أن : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha(\alpha-2)}$ | 0,5

ب – بين أن $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{x^3}$ لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f | 0,75

3) أنشئ (C) (نأخذ $\alpha\approx 1,5$) | 0,5

III – نعتبر الدالة العددية F للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$(\forall x>0)\quad F(x)=\int_x^{2x}\frac{1-e^t}{t^2}dt \quad \text{و} \quad F(0)=-\ln 2$$

1) أ – باستعمال مكاملة بالأجزاء , بين أن: $(\forall x>0)\ F(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{2x}-\dfrac{e^x-1}{x}-\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$ | 0,5

ب – بين أن لكل x من $]0,+\infty[$: $e^x\ln 2\leq \displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt\leq e^{2x}\ln 2$ | 0,5

ج – احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$ ثم استنتج أن الدالة F متصلة على اليمين في الصفر . | 0,5

2) أ – بين أن لكل x من $]0,+\infty[$: $F(x)\leq\dfrac{1-e^x}{2x}$ | 0,25

ب – احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ | 0,25

3) بين أن F قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و أن : $(\forall x>0)\ F'(x)=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)^2$ | 0,5

	4) أ- ليكن x من المجال $]0,+\infty[$.
0,75	بين أنه يوجد c من المجال $]0,x[$ بحيث: $F(x)-F(0)=-\frac{1}{2}xe^{2c}$ (يمكنك استعمال مبرهنة التزايدات المنتهية مرتين)
0,25	ب ـ أثبت أن لكل x من $]0,+\infty[$: $-\frac{1}{2}e^{2x}\leq\frac{F(x)-F(0)}{x}\leq-\frac{1}{2}$
0,25	ج- استنتج أن F قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر و أن $F_d'(0)=-\frac{1}{2}$